Algebra diagramática para la lógica proposicional

Basada en la lógica diagramática de Flavio Moreno Coronel.

Por Antonio Moreno

Unidad 1:
Introducción a la lógica proposicional

Proposiciones y conectivos en el lenguaje

Una proposición simple es una afirmación que es o podrá ser una afirmación verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. *(P)*

Un conectivo lógico son las palabras clave que conectan dos proposiciones, por ejemplo las palabras “y”, “o”, “si … entonces”. *(P y Q)*

Existe también la negación de una proposición. *(no P)*

La lógica proposicional simplifica estos elementos con símbolos y construye, analiza y verifica proposiciones compuestas.

Proposiciones simples

Son ejemplos de proposiciones simples y su notación las siguientes:

P: “Me compré una moto”.

Q: “Hoy jugamos futbol”.

R: “José no salió de viaje”.

Todas estas tienen o tendrán un valor de verdad que puede ser *V* (verdad) o *F* (falso), pero no ambos a la vez.

No son proposiciones las exclamaciones o las preguntas, por ejemplo: “Auxilio”, “¿Qué hora es?, …

Negación de proposiciones simples

La negación de una proposición simple cambia su valor de verdad. Si la proposición original es verdadera, su negación es falsa, y viceversa.

P: Me compré una moto.

No P: No me compré una moto.

Q: Hoy jugamos futbol.

No Q: Hoy no jugamos futbol.

R: José no salió de viaje.

No R: José salió de viaje.

La negación de una negación produce una afirmación, es decir, la doble negación se anula.

Lenguaje de proposiciones

Para los fines de la lógica, no es importante qué es lo que dicen las proposiciones simples, sino solo el valor de verdad de estas, por ello las denota simplificadamente con una letra como variable.

El conectivo usado entre dos proposiciones es muy importante porque muestra una relación entre las proposiciones y genera su propia regla para analizar o determinar el valor de verdad resultante. A esta estructura se le llama proposición compuesta.

El objetivo es analizar las proposiciones compuestas, logrando describir su valor de verdad en función de las proposiciones simples o en el mejor de los casos determinar su valor de verdad general o una conclusión.

Proposiciones compuestas

Son ejemplos de proposiciones compuestas las siguientes:

P y Q: Me compré una moto **y** me compré un carro.

R y S: Ayer **y** hoy jugamos futbol.

T o U: Salió de viaje a España **o** a Italia.

Si V entonces W: **Si** llueve **entonces** me compro un paraguas.

Estos ejemplos tienen dos proposiciones simples unidas con un conectivo lógico. Según los valores de verdad de cada proposición simple, el enunciado general o proposición compuesta también tendrá como resultado un valor de verdad que puede ser *V* (verdad) o *F* (falso) según la regla del conectivo lógico usado.

Ejemplo de razonamiento

Un padre llega a casa y le dice a su hijo pequeño que “está lloviendo”. El niño razona y dice: “la calle está mojada”.

Formalicemos a lógica proposicional y veamos el razonamiento:

P: "Está lloviendo“ , *Q*: "La calle está mojada“

El niño tiene un conocimiento previo que relaciona *P* con *Q*:

Si P entonces Q : “Si llueve, entonces la calle se moja”

Conoce el valor de *P* por lo que dijo su padre:

P es verdadero, es decir, “Está lloviendo”

Conclusión: *Q es verdadero*, es decir, “La calle está mojada”

Valor de verdad

La lógica verifica la estructura de los argumentos más que los hechos reales, por ello:

- Toda proposición puede ser verdadera o falsa, pero no siempre tiene un valor asignado de verdad o falsedad.
- En ocasiones una proposición compuesta como “Si P entonces Q” es verdadera, pero no se sabe el valor de verdad de las proposiciones individuales.
- La lógica proposicional se encarga de analizar la validez de los argumentos, es decir, del razonamiento o inferencia empleado, pero no del contenido de las proposiciones o su veracidad.

Detección de falacias o errores

Se puede exponer un razonamiento y este no ser válido, ejemplo:

P: "Está lloviendo“ , *Q*: "La calle está mojada“

Si P entonces Q : “Si llueve, entonces la calle se moja”

Q es verdadero, es decir, “La calle está mojada”

Conclusión errada: *P es verdadero*, es decir, “Está lloviendo”

La lógica proposicional permite detectar las falacias, detallando cuales son las inferencias válidas y cuales no.

¿Por qué estudiar la lógica proposicional?

La lógica analiza el proceso del razonamiento a través del lenguaje, logrando explicar cómo se deducen conclusiones válidas a partir de evidencias previas llamadas premisas.

Estudiar lógica nos permite organizar ideas de forma coherente, evita contradicciones, facilita la expresión clara y concisa de nuestros pensamientos y mejora la capacidad de comprender y evaluar la validez de los argumentos de los demás.

En la práctica, la lógica potencia la reflexión filosófica, la construcción de teorías científicas, la interpretación jurídica, la argumentación en debates, la identificación de errores en el discurso político, la precisión en la programación y la inteligencia artificial, etc.

Unidad 2:
Conectivos lógicos y las tablas de verdad

El conectivo lógico vincula dos proposiciones

Con las siguientes proposiciones *P*: "Estudias", *Q*: "Vas al cine"; tenemos:

P y *Q*:	Estudias y vas al cine
P o *Q*:	Estudias o vas al cine
Si *P* entonces *Q*:	Si estudias, entonces vas al cine
O *P* o *Q*:	O estudias o vas al cine
P sí y solo sí *Q*:	Estudias sí y solo sí vas al cine

El cambio del conectivo produce una proposición compuesta con diferente significado y relaciona el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

Regla de verdad de la Conjunción “y” - Disyunción “o”

Teniendo las siguientes proposiciones

P: Barres el piso

Q: Lavas la ropa

Conjunción: “*P* y *Q*”

En este caso solo hay una alternativa, tiene que cumplirse tanto *P* como *Q* para que “*P* y *Q*” sea verdadera. Si alguna de ellas es falsa la expresión completa es falsa.

Disyunción: “*P* o *Q*”

Esta proposición es más flexible, tolera que ambas sean verdaderas o solo alguna de ellas, pero no permite que ambas sean falsas.

Regla de verdad de la Condicional “Si … entonces” – Bicondicional “Sí y solo sí”

Teniendo las siguientes proposiciones

P: Pintas la sala

Q: Cambias los muebles

Condicional: “Si *P*, entonces *Q*”

Te dice que cuando ocurre *P* debe ocurrir *Q*, esta es la única condición. Es un error decir que si ocurre *Q* debe ocurrir *P*.

Bicondicional: “*P* sí y solo sí *Q*”

Esta proposición es más relacionada que la anterior, si ocurre *P* entonces debe ocurrir *Q* y si ocurre *Q* debe ocurrir *P*; es decir, que ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad (ambas verdaderas o ambas falsas).

Regla de verdad de Disyunción fuerte "O … o" – Negación conjunta

Teniendo las siguientes proposiciones

P: Estudias

Q: Trabajas

Disyunción fuerte: "O *P* o *Q*"

Te dice que si ocurre *P* no debe ocurrir *Q*, además, si ocurre *Q* no debe ocurrir *P*; es decir, que ambas proposiciones tienen diferente valor de verdad.

Negación conjunta: "Ni *P* ni *Q*"

Esto ocurre o es verdadero, solo si ambas proposiciones son falsas.

Una proposición tiene dos probabilidades

Debido a que la lógica estudia más el argumento y no los hechos que han ocurrido, abarca todas las probabilidades de las proposiciones, que por definición son dos: Verdadero (V) o Falso (F).

Si la expresión tiene dos proposiciones, entonces las probabilidades se analizan en una tabla que tiene los cuatro casos posibles.

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

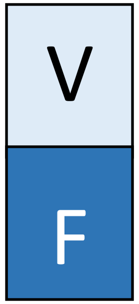
Por cada proposición adicional la tabla duplicaría la cantidad de filas.

Tablas de verdad de los conectivos lógicos

Se lee / **Proposiciones**		**P y Q**	**P o Q**	**Si P entonces Q**	**P sí y solo sí Q**	**O P o Q**
		Conjunción	**Disyunción**	**Condicional**	**Bicondicional**	**Disy. Exclusiva**
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \Delta Q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

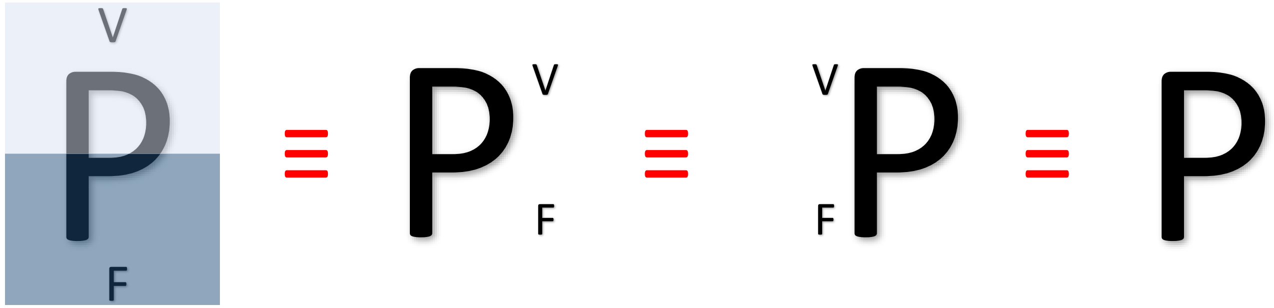
Unidad 3:
Simbolización por diagramas

Una proposición



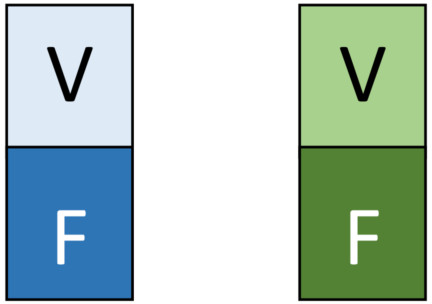
Toda proposición lógica tiene un valor de verdad: verdadero (V) o falso (F), pero no ambos a la vez.

Esta cualidad de una proposición **P** la representaremos así:



La parte superior simboliza “P verdadero” y la inferior “P falso”.

Proposiciones en simultáneo



Cuando hay dos proposiciones pueden ocurrir cuatro combinaciones posibles:

V-V Cuando ambas son verdaderas

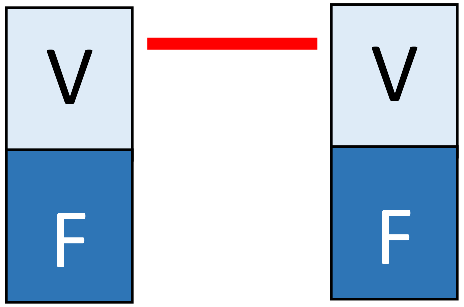
V-F Cuando la primera es verdadera y la segunda es falsa

F-V Cuando la primera es falsa y la segunda verdadera

F-F Cuando ambas son falsas

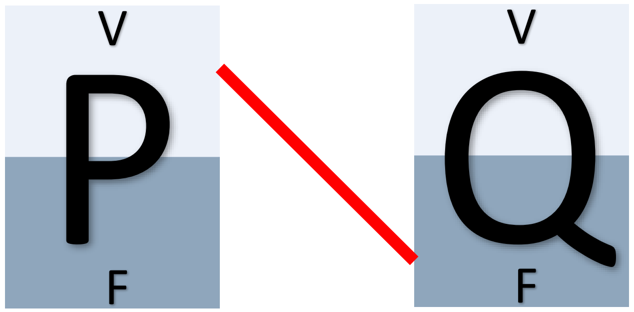
El objetivo es determinar el valor de verdad de cada proposición, o al menos reducir algunas de estas cuatro combinaciones.

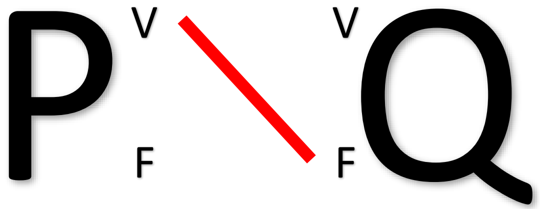
Puente



Usaremos una línea o monograma para unir una combinación de alternativas verdadero (V) o falso (F) entre dos proposiciones.

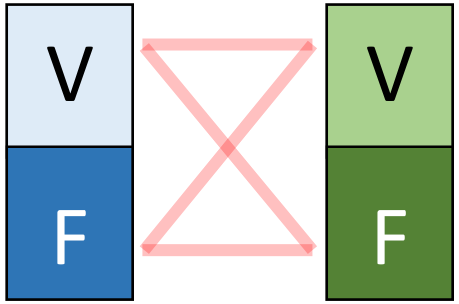
Como ejemplo mostramos el puente que une P verdad con Q falso:





En ambas denotaciones, trazamos una línea como puente entre la parte superior o verdadera de **P** y la inferior o falsa de **Q**.

Combinaciones posibles

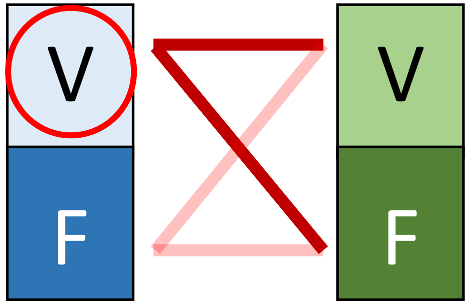


Si conocemos que la primera proposición es verdadera, entonces:

Sí puede ocurrir que:

V-V Ambas sean verdaderas

V-F La primera es verdadera y la segunda es falsa



No puede ocurrir que:

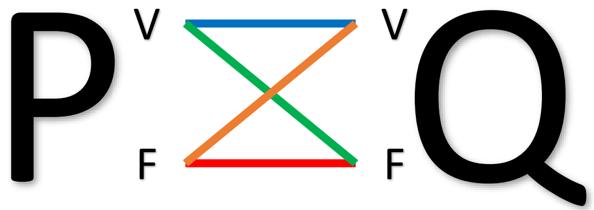
F-V La primera es falsa y la segunda verdadera

F-F Ambas son falsas

En este caso dos combinaciones son posibles y dos no

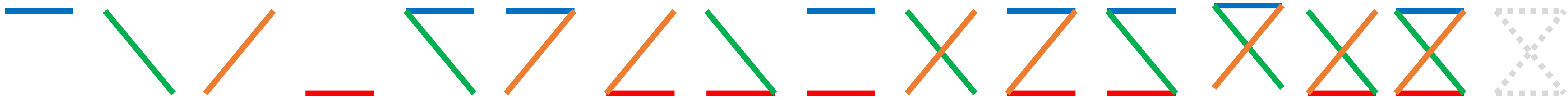
Combinación de puentes

Hay cuatro puentes para las combinaciones disponibles.



A esta figura le llamaremos tetragrama.

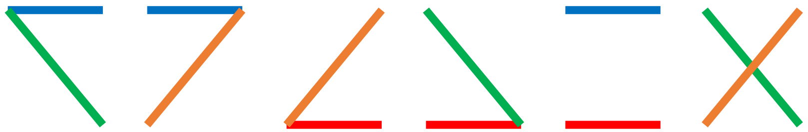
Según descartemos alguna combinación, esta será borrada del tetragrama, de esta forma se forman 16 alternativas de diagramas:

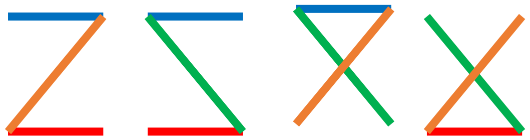


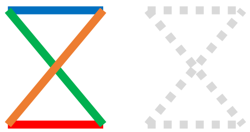
Clasificación de los diagramas

Los 16 diagramas se pueden clasificar por el número de puentes o combinaciones posibles:

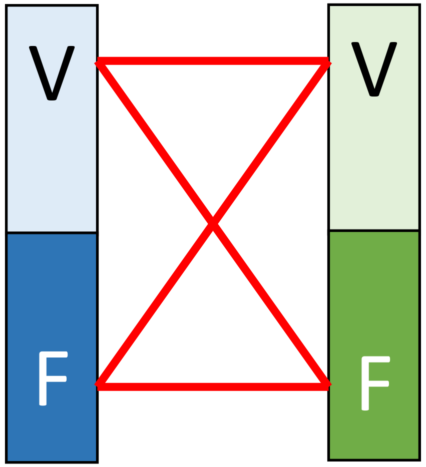
4 monogramas 

6 bigramas 

4 trigramas 

1 tetragrama y un 1 vacío 

Tablas de verdad de los Conectivos lógicos



Se lee		**P y Q**	**P o Q**	**Si P entonces Q**	**P sí y solo sí Q**	**O P o Q**
Proposiciones		**Conjunción**	**Disyunción**	**Condicional**	**Bicondicional**	**Disy. Exclusiva**
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \Delta Q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Observamos que la conjunción solo tiene una alternativa de ser verdadero, mientras que la disyunción tiene tres verdaderas.

Para formar el diagrama del conectivo usaremos los puentes que corresponden al valor de "verdad" en la tabla del conectivo.

Representación de la conjunción

Para la conjunción, “P y Q”, hay una sola alternativa verdadera, es decir, que el único puente de verdad es cuando ambas proposiciones son verdaderas (V-V).

Usaremos un puente de verdad conectando esta alternativa y no en las otras tres alternativas por ser falsas.

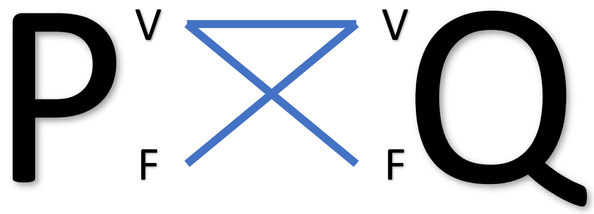
Se lee: P y Q

Este símbolo muestra rápidamente que la relación entre P y Q solo es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas. A esta estructura de dos proposiciones y un puente de verdad la llamaremos binomio.

Representación de la disyunción

Para la disyunción, “P o Q”, se tienen tres alternativas de ser verdaderas (V-V), (V-F), (F-V), y la única falsa es cuando ambos son falsos (F-F).

Usaremos los tres puentes de verdad para representar este conector lógico



Se lee: P o Q

Este símbolo muestra rápidamente que la relación entre P y Q solo es falsa cuando ambas proposiciones son falsas.

Representación de la condicional

Para la condicional, “Si P entonces Q”, se tienen tres posibilidades de ser verdadero, y la única falsa es la alternativa (V-F).

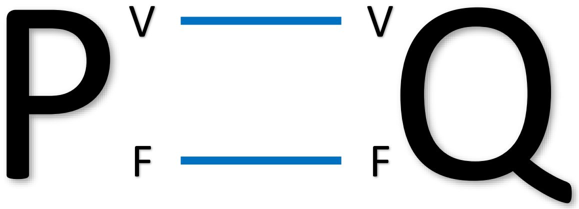
Usaremos los tres puentes de verdad para representar este conector lógico

Se lee: P implica Q

Este símbolo, al igual que la disyunción, tiene tres puentes de verdad y muestra rápidamente la tabla de verdad que los une.

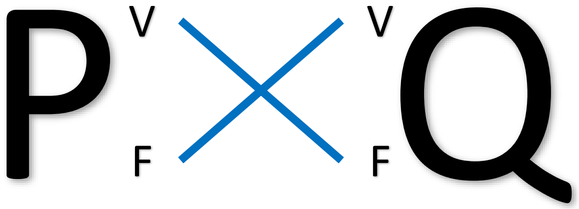
Bicondicional y disyunción exclusiva

La bicondicional, “P si y solo si Q”, es verdadera en valores iguales (V-V) y (F-F).



Se lee: P equivale a Q

La disyunción exclusiva, “o P o Q”, es verdadera en los contrarios (V-F) y (F-V)

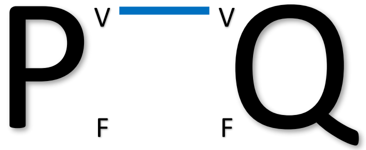


Se lee: P contrario a Q

Al leerse de esta manera quedará más claro cual es la relación entre sus valores de verdad y recalca el uso algebraico en las operaciones.

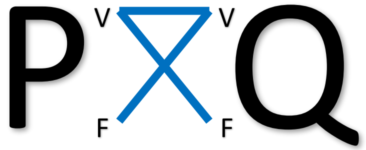
Símbolos más comunes

$P \wedge Q$



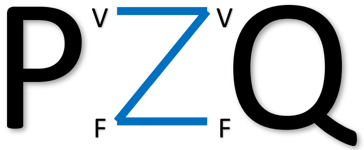
Conjunción: “P y Q”

$P \vee Q$



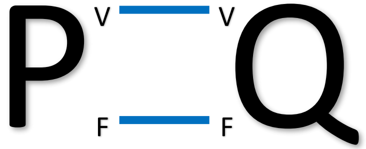
Disyunción: “P o Q”

$P \rightarrow Q$



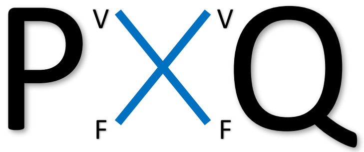
Condicional: “Si P entonces Q”, “P implica Q”

$P \leftrightarrow Q$



Bicondicional: “P si y solo si Q”, “P equivale a Q”

$P \Delta Q$

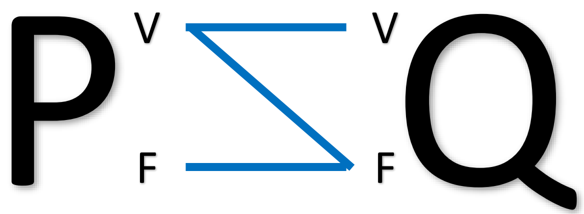


Disyunción exclusiva: “o P o Q”, “P contrario a Q”

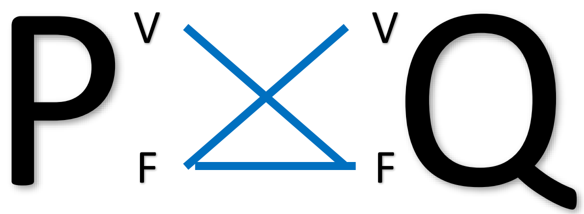
Estos símbolos representan las tablas de verdad, por ello se identifica claramente las propiedades que tienen.

Trigramas adicionales

Se tienen adicionalmente dos símbolos que no necesariamente son directos del lenguaje.



Se lee: P replica Q



Se lee: P excluye Q

Representación de negación

F
V

La negación de una proposición hace que su tabla de verdad cambie:

P	~P
V	F
F	V

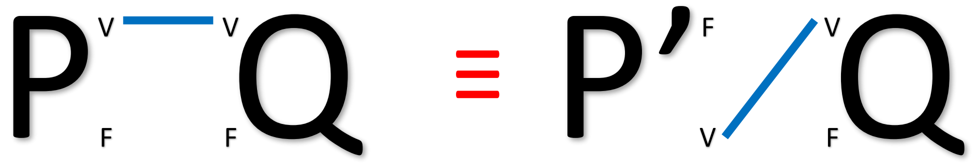
Se denota: $\sim P \equiv \overset{F}{\underset{V}{P'}} \equiv P'^{F}_{V} \equiv P'$

Deberemos recordar que en una proposición negada se invierten los valores de verdad, es decir, Verdad (V) está en la parte inferior.

La doble negación se anula, es decir, la proposición queda sin negarse.

La negación de una proposición en un binomio:

Al negar una de las proposiciones se intercambian los valores de verdad dentro de la proposición, los puentes de verdad del binomio cambian de posición pero mantienen los mismos puentes de verdad.



Siempre estamos uniendo V-V, es decir, la misma tabla de verdad.

La negación transforma el diagrama del conectivo.

Referencia a un valor de verdad

P es verdadero, se simboliza: $$P^{V}_{F} \equiv P^{\circ}$$

P es falso, se simboliza: $$P^{V}_{F} \equiv P_{\circ} \equiv \sim P^{\circ}$$

La afirmación $\mathbf{P}^{\circ}$ se lee como "P verdadero", pero de acuerdo al contexto puede indicarse como "sí P" o simplemente "P" que coincide con el nombre de la proposición.

$\mathbf{P}_{\circ}$ se lee como "P falso" o "no P".

Lectura de los puentes o monogramas

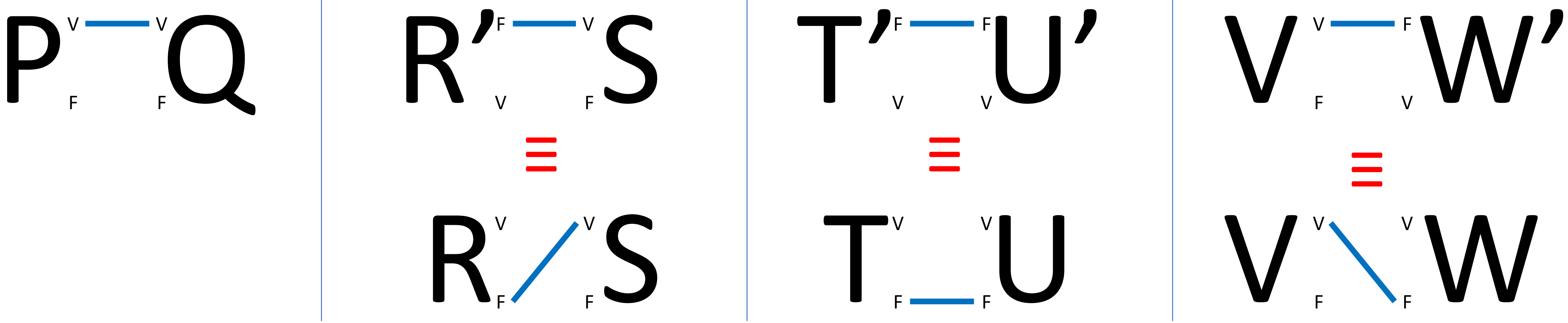
Indicaremos debajo del binomio los valores de verdad que se **unen** en cada caso y la forma más simple de **leerlos**:

P ‾ Q	R / S	T _ U	V \ W
(**P°** y **Q°**)	(**$R_{\circ}$** y **S°**)	(**$T_{\circ}$** y **$U_{\circ}$**)	(**V°** y **$W_{\circ}$**)
(P y Q)	(no R y S)	(no T y no U)	(V y no W)

Equivalencias en monogramas

Partiendo de la conjunción en cuatro ejemplos, denotaremos sus <u>equivalencias</u> al usar la negación junto a la conjunción.

(P y Q) | (no R y S) | (no T y no U) | (V y no W)



Notamos que una misma lectura puede tener diferentes denotaciones pero manteniendo los puentes de verdad equivalentes.

Equivalencia de los bigramas convergentes

Dos expresiones son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son iguales. Por esto, podemos reducir los binomios con bigramas convergentes.

P	Q	P⁊Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

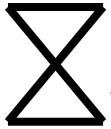
M	N	M ∠ N	~M
V	V	**F**	**F**
V	F	**F**	**F**
F	V	**V**	**V**
F	F	**V**	**V**

P⁊Q ≡ Q

M∠N ≡ M’

Los bigramas unidos al extremo dejan sin efecto una de las variables

Otros conectivos

Existen también el tetragrama , también llamado tautología.

Cuando el resultado es un tetragrama como conector en un binomio, se dice que es una tautología, porque para cualquier valor que tomen las variables siempre existe un puente de verdad posible.

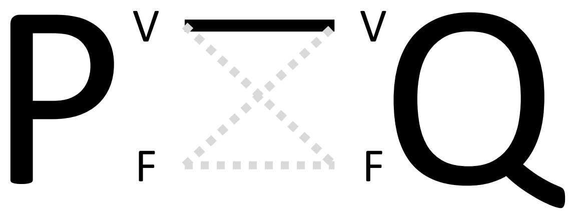
El diagrama complementario es el vacío , también llamado contradicción porque no existe ningún puente de verdad disponible, es decir, que no hay alternativas de solución.

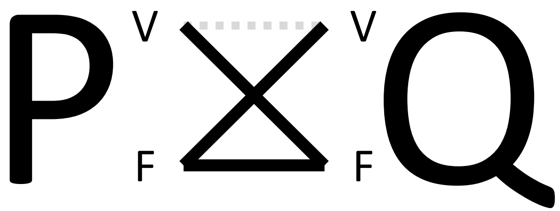
Negación de un binomio

La negación de P y Q se denota de esta manera: $(P \overline{\quad} Q)'$

Cuando negamos un binomio, indicamos que los valores verdaderos de la tabla de verdad pasan a ser falsos y viceversa.

Para ello usaremos el símbolo complementario en cada caso:

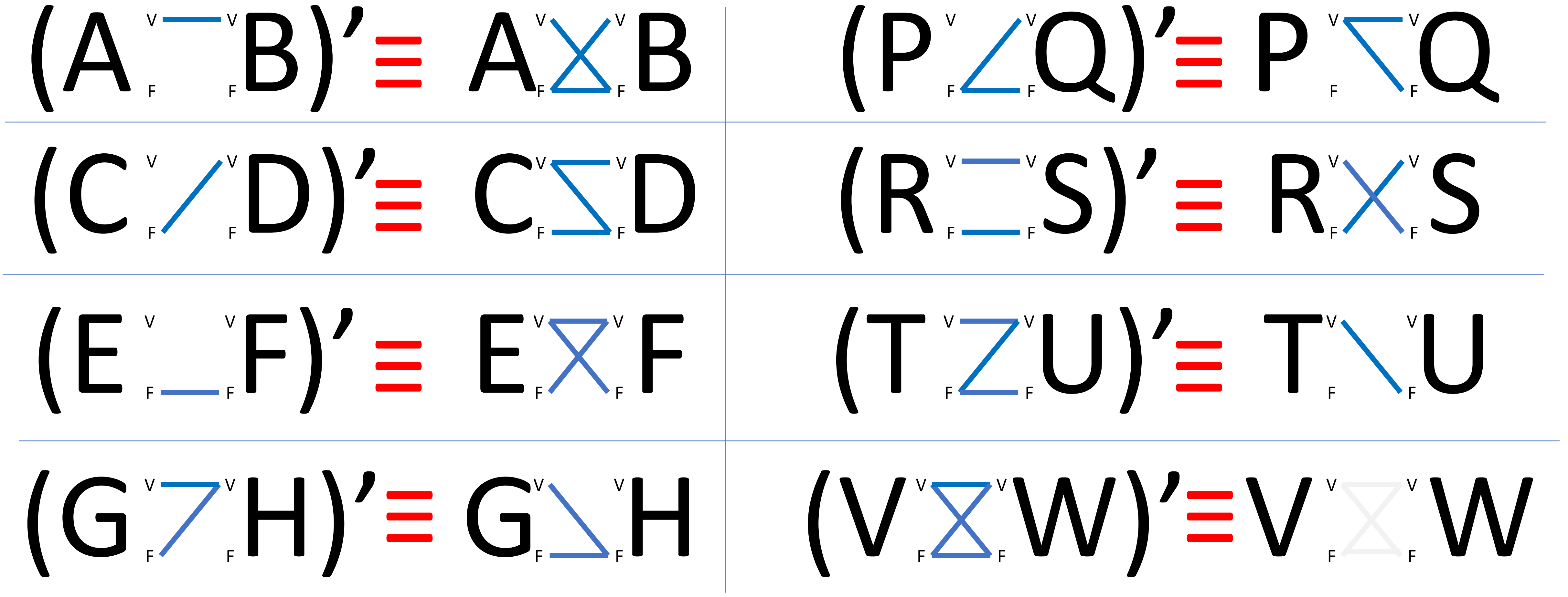
En P y Q 

su complemento es 

es decir, que el puente verdadero pasa a ser falso y viceversa.

Operaciones de negación de binomios

Realizamos algunas operaciones de negación en algunos binomios y denotamos su equivalencia con el signo ≡.



Dualidad de un binomio

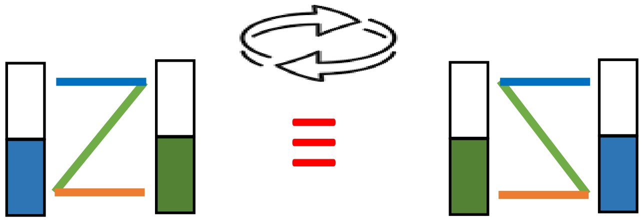
Debido a que un binomio es una proposición compuesta, se puede entender su dualidad con el siguiente esquema:

P ¯ Q	V		V	P ¯ Q
(P ¯ Q)'	F	≡	F	P ⊻ Q

A pesar que se determina claramente lo verdadero y falso, en el lenguaje de proposiciones enfatiza las declaraciones verdaderas.

Unidad 4:
Algebra Diagramática

Conmutación del binomio

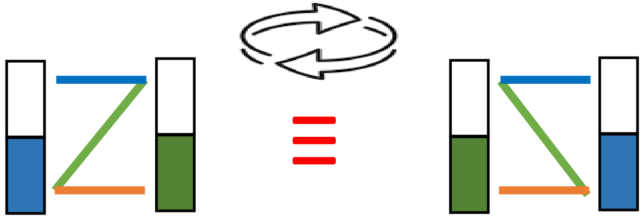


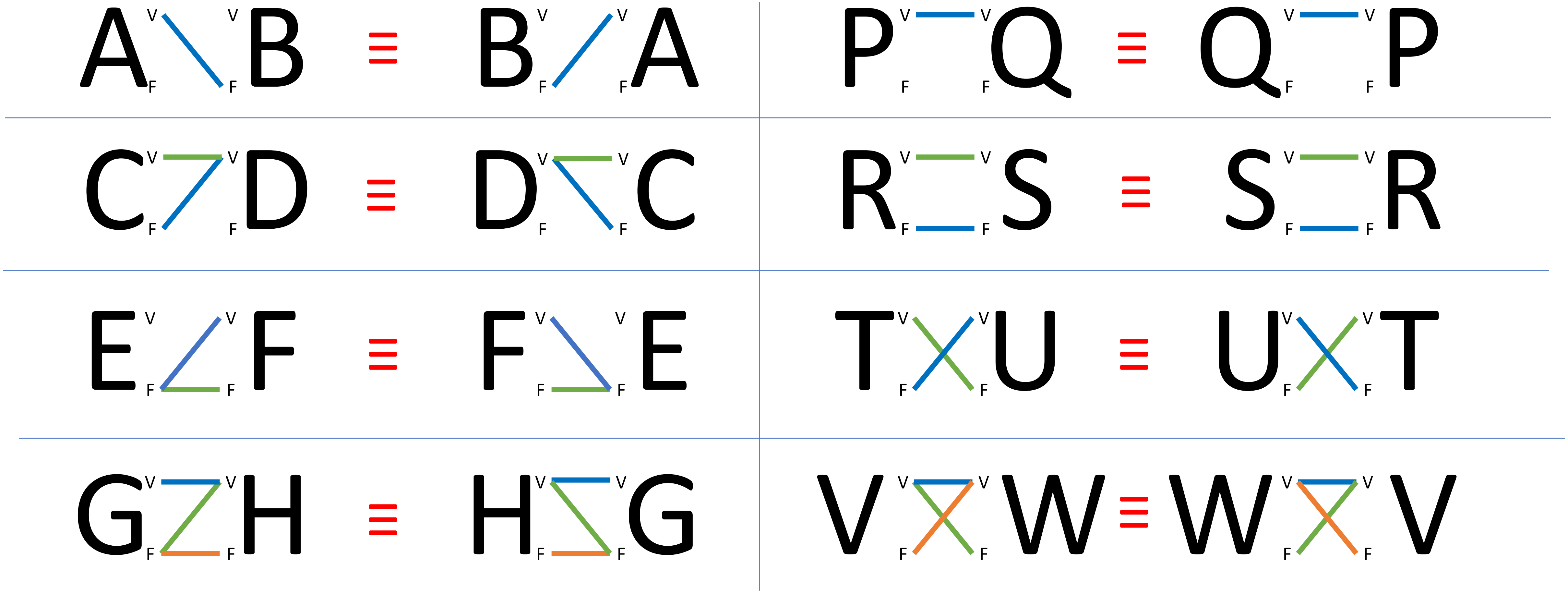
Al cambiar de posición las proposiciones en el binomio se mantienen los puentes de verdad originales.

Notaremos que la única alternativa falsa es cuando G es verdad y H falso, lo cual permanece al hacer la conmutación.

Podemos visualizar el signo conmutado como un reflejo en un espejo (lados izquierdo y derecho).

Ejercicios de conmutación





Se verifica la conmutatividad por su símbolo

(P y Q)

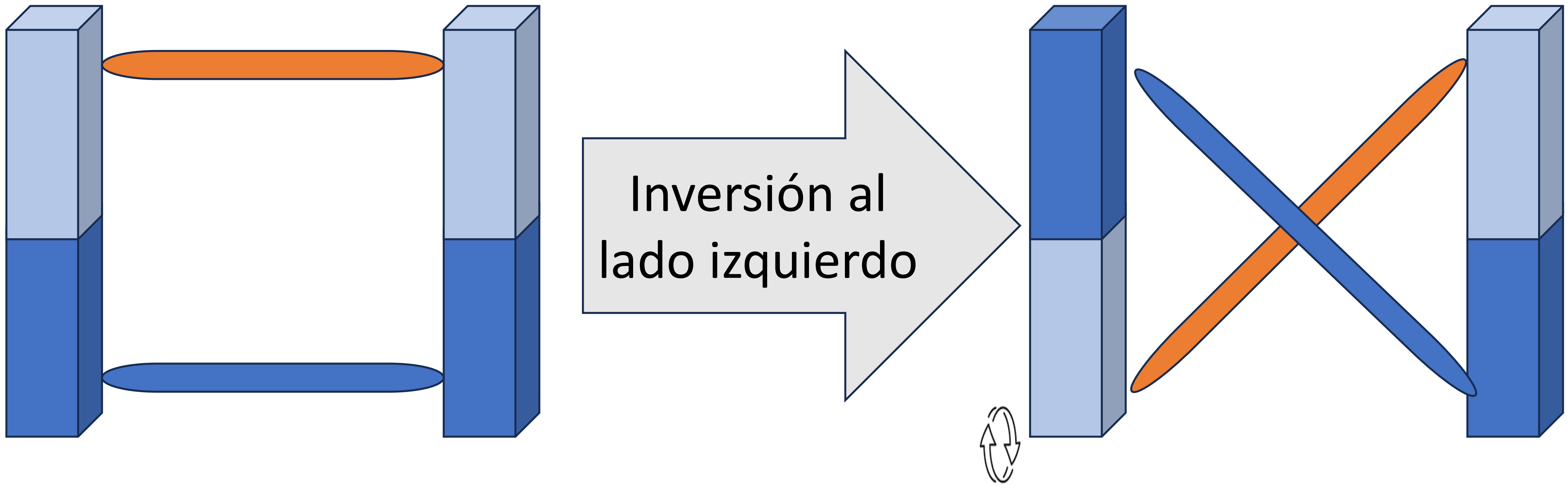
(P o Q)

(o P o Q)

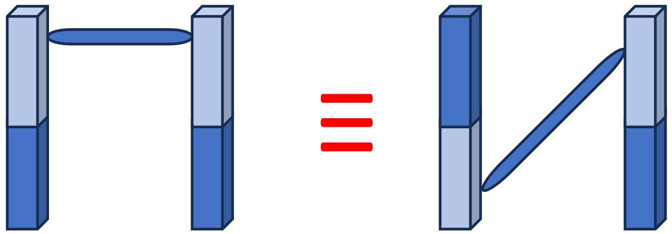
(P si y solo si Q)

El Abaco

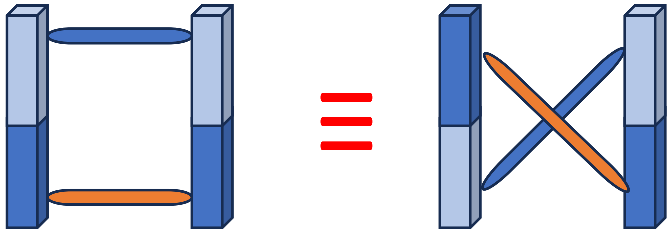
Para comprender el proceso de negación o inversión de valores de una proposición, usaremos un ábaco que consta de dos postes a manera de proposiciones, pintados con una parte verdadera y otra falsa, y una líneas elásticas que simbolizarán los puentes de verdad.



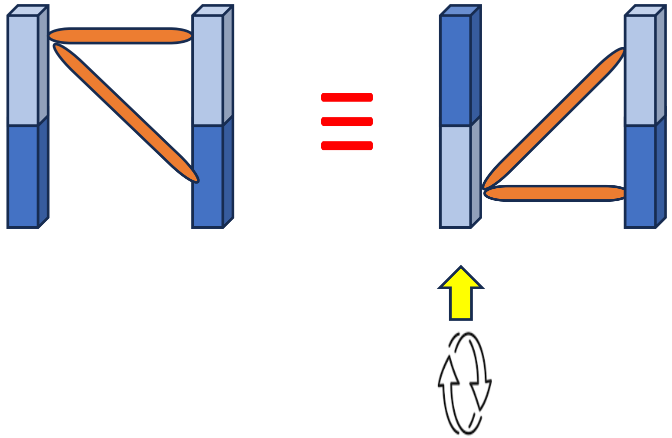
Ejercicios de inversión izquierda



Al realizar una inversión izquierda, el monograma mantiene fijo el punto de la parte derecha. Siempre pasa de horizontal a diagonal y viceversa.

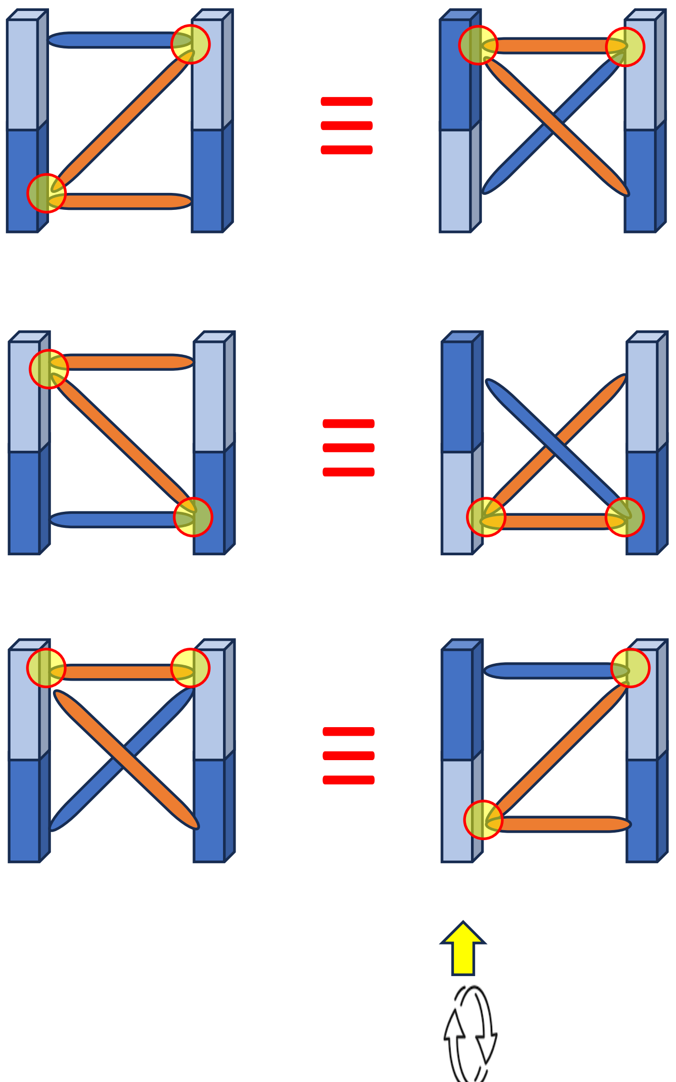


Las horizontales producen un cruce y viceversa.



El bigrama convergente que apunta al lado izquierdo arriba, pasará a apuntar al lado izquierdo abajo y viceversa.

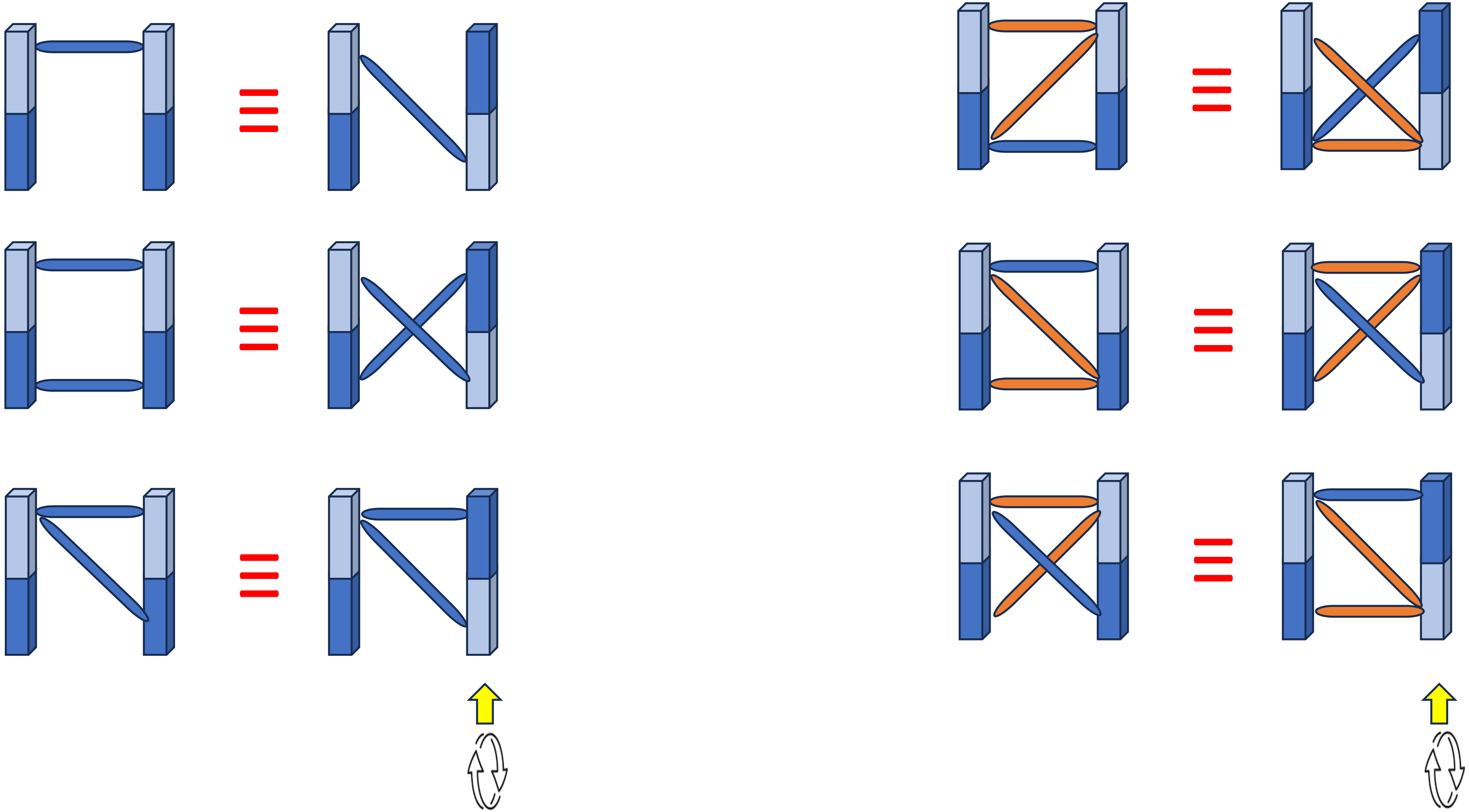
Ejercicios de inversión izquierda en trigramas



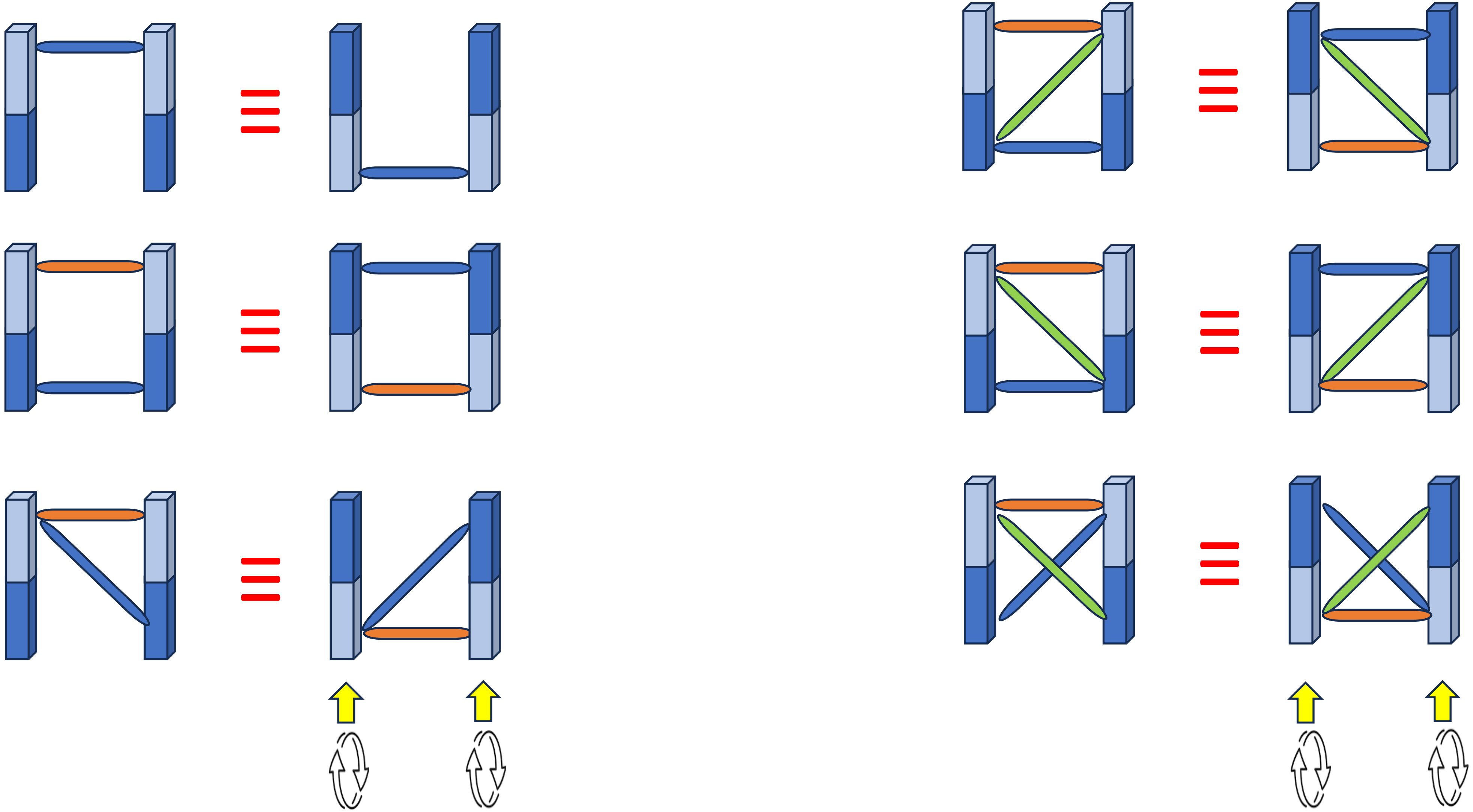
La inversión de un trigrama “tipo Z” produce un trigrama “tipo O” y viceversa.

Para los trigramas es bueno notar los puntos donde convergen las líneas del diagrama; al hacer la inversión izquierda el punto izquierdo cambia de posición, mientras que el derecho se mantiene. Los dos puntos finales permiten identificar el trigrama resultante fácilmente.

Ejercicios de inversión derecha

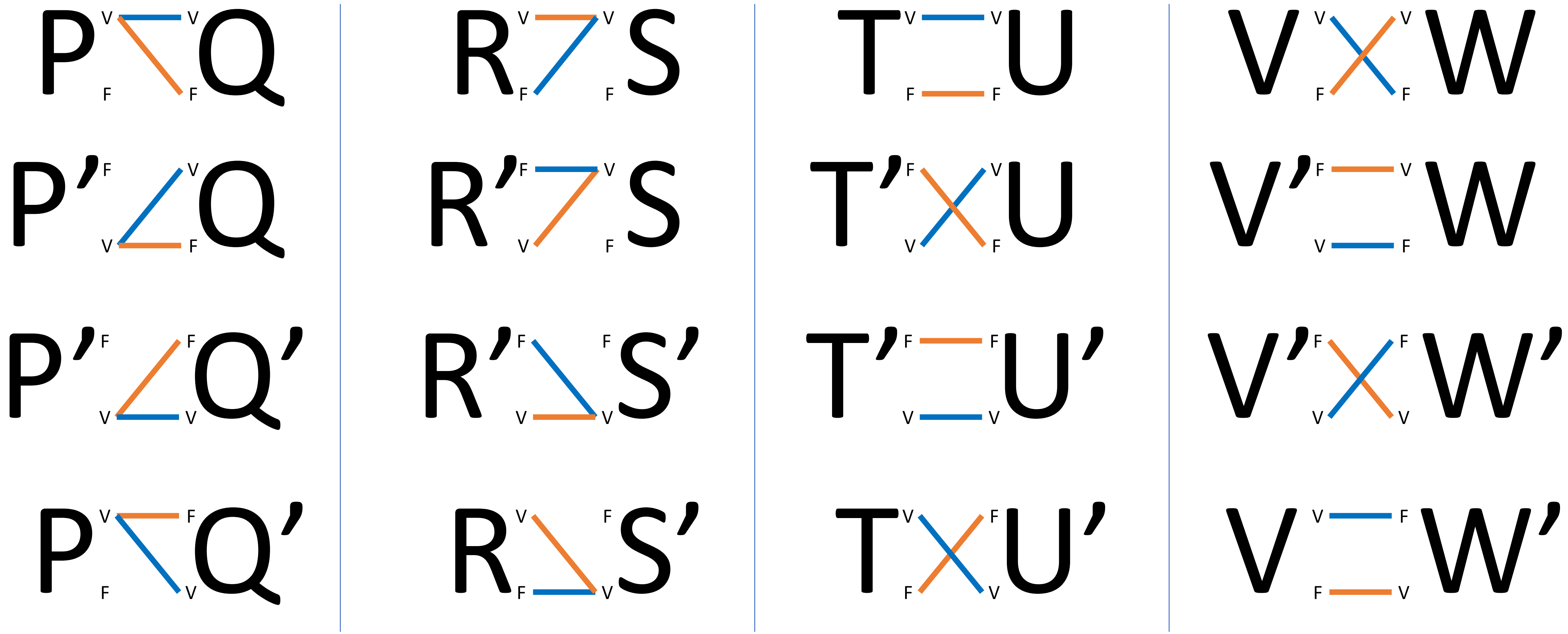


Ejercicios de doble inversión

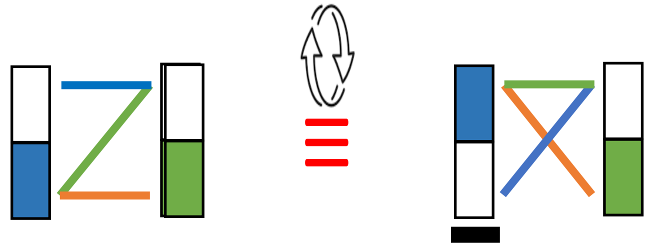


Equivalencias en un bigrama

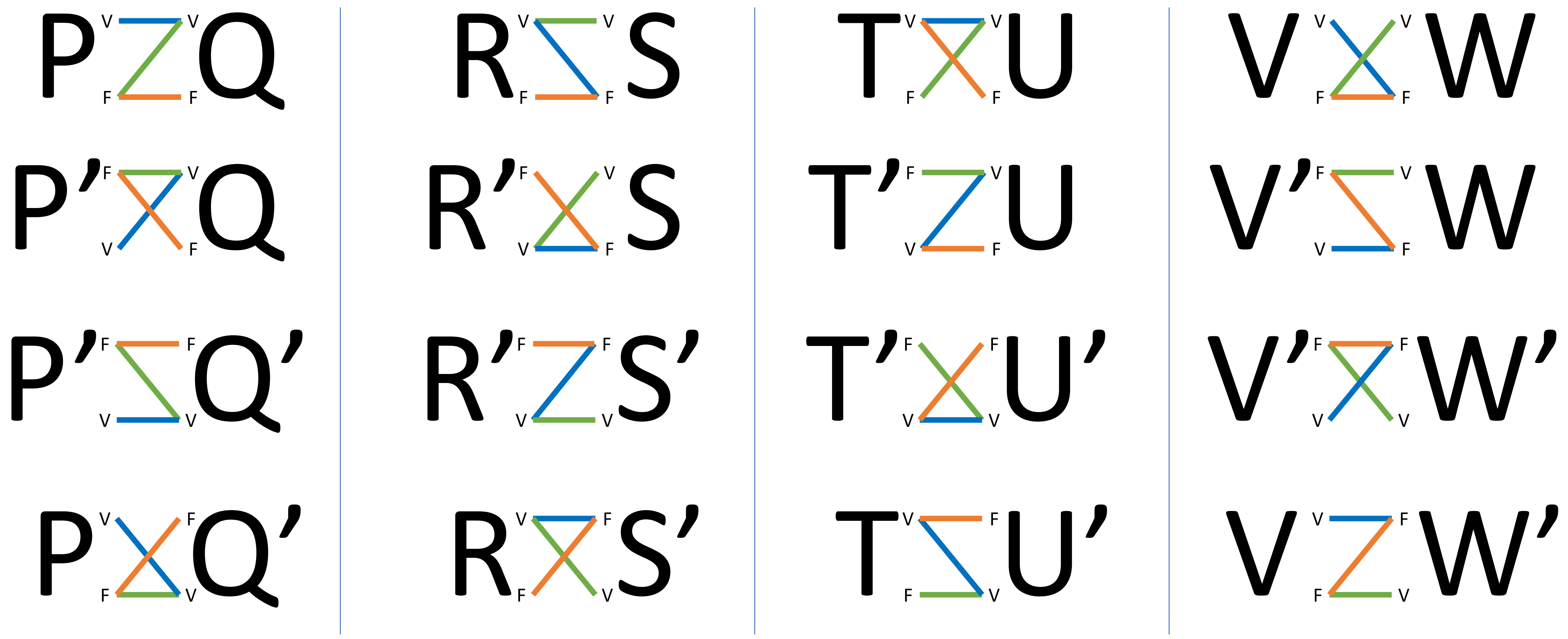
- Se trabajaran formas equivalentes en cada columna. Notar los colores.



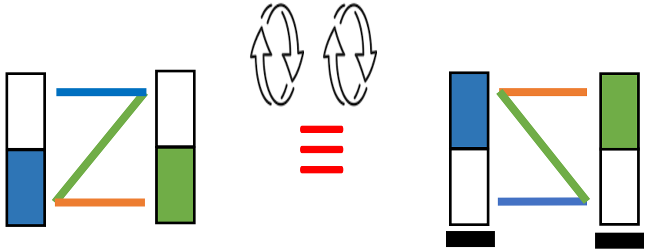
Negaciones en Trigramas



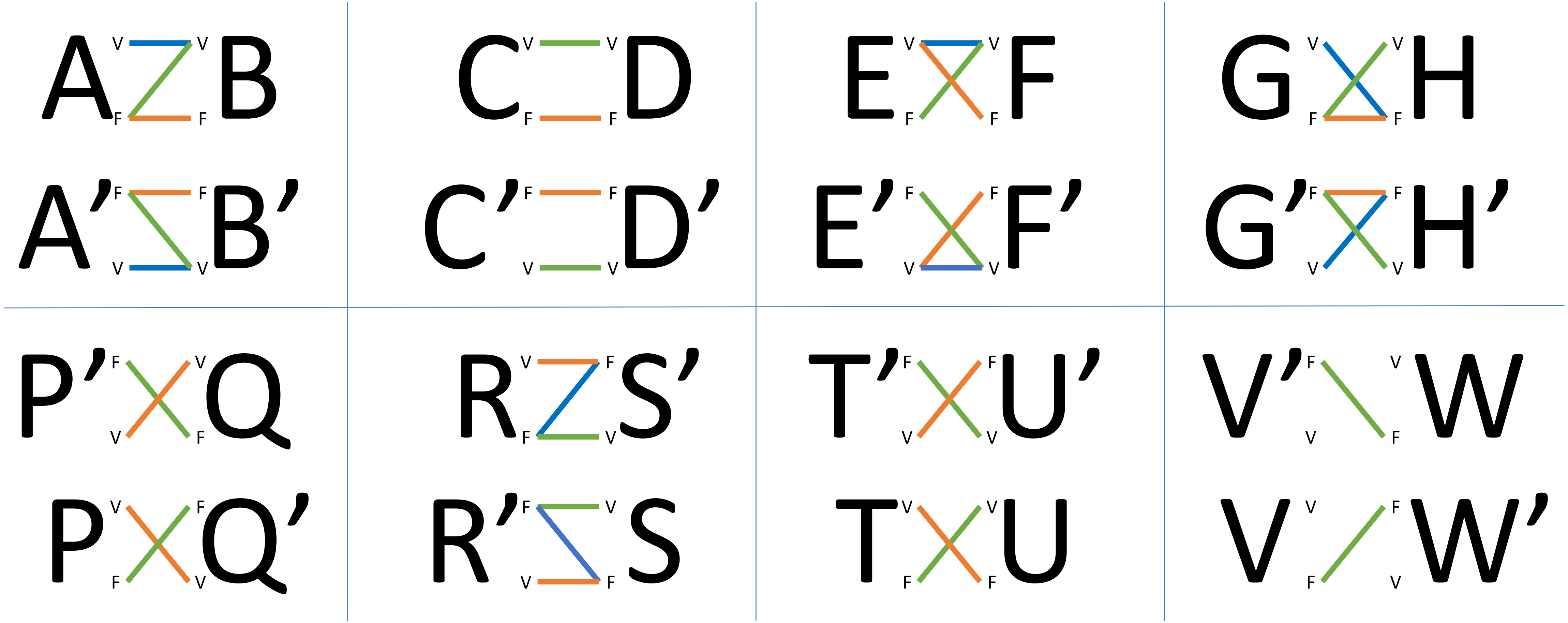
- Se trabajaran formas equivalentes en cada columna.



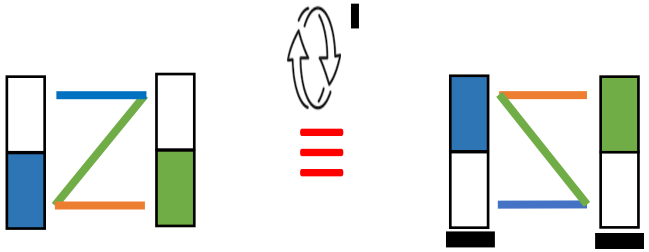
Doble inversión



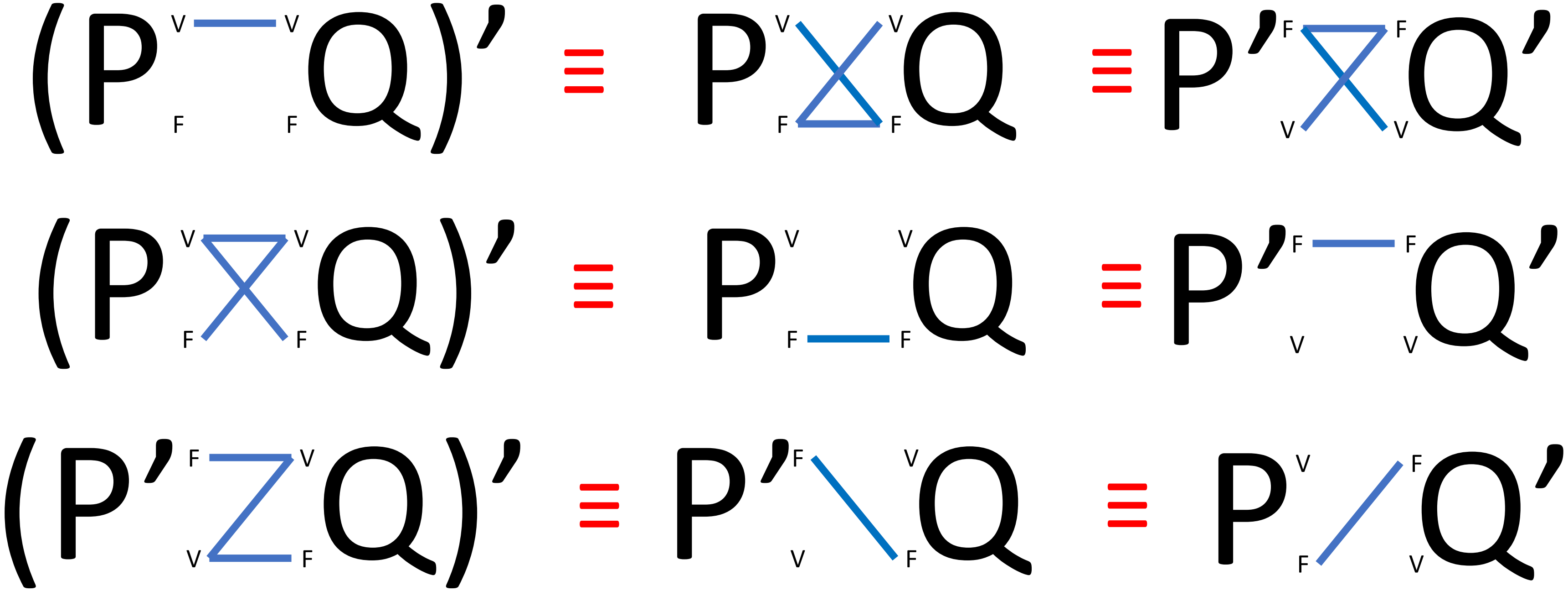
- Se niegan las proposiciones iniciales y el signo es boca abajo.
- Las formas son equivalentes porque mantienen sus puentes de verdad.



Negación dual



- Se usa cuando se niega un binomio y se desea usar los negativos de las proposiciones. Después de la negación se hace una doble inversión

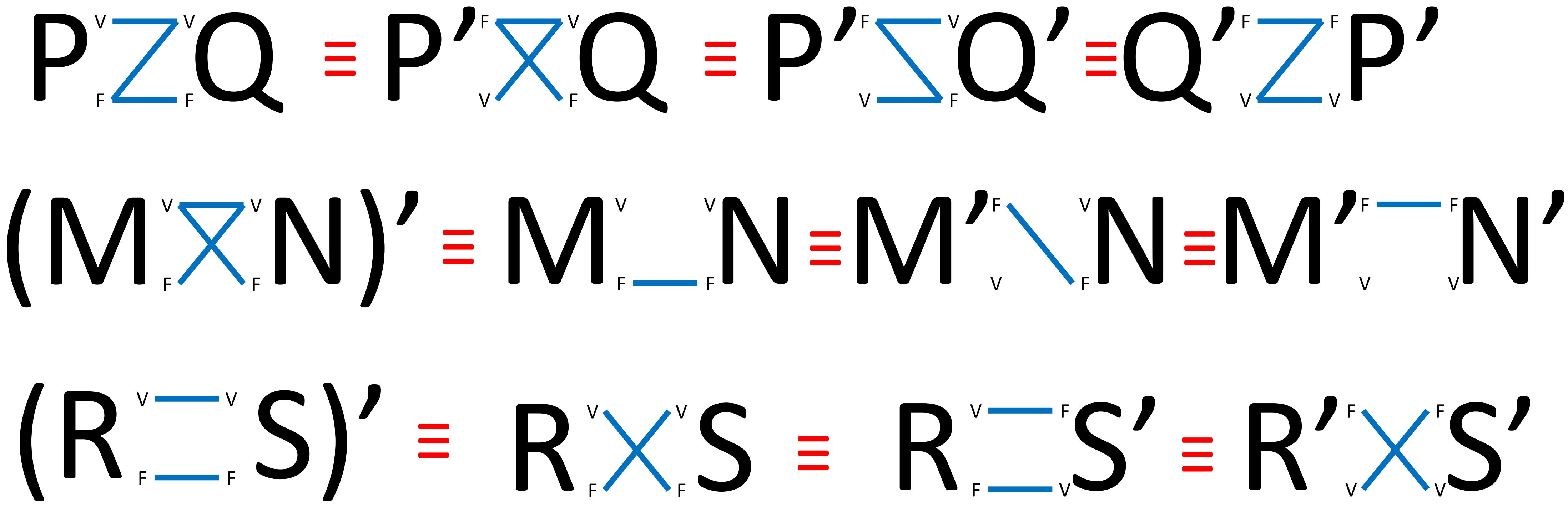


- Esta operación se usa principalmente en las leyes de Morgan y se puede hacer en un paso con la práctica.

Equivalencias

Las propiedades como: $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P$

ahora se pueden deducir por la operación de los diagramas.



Se verifican las leyes de equivalencia

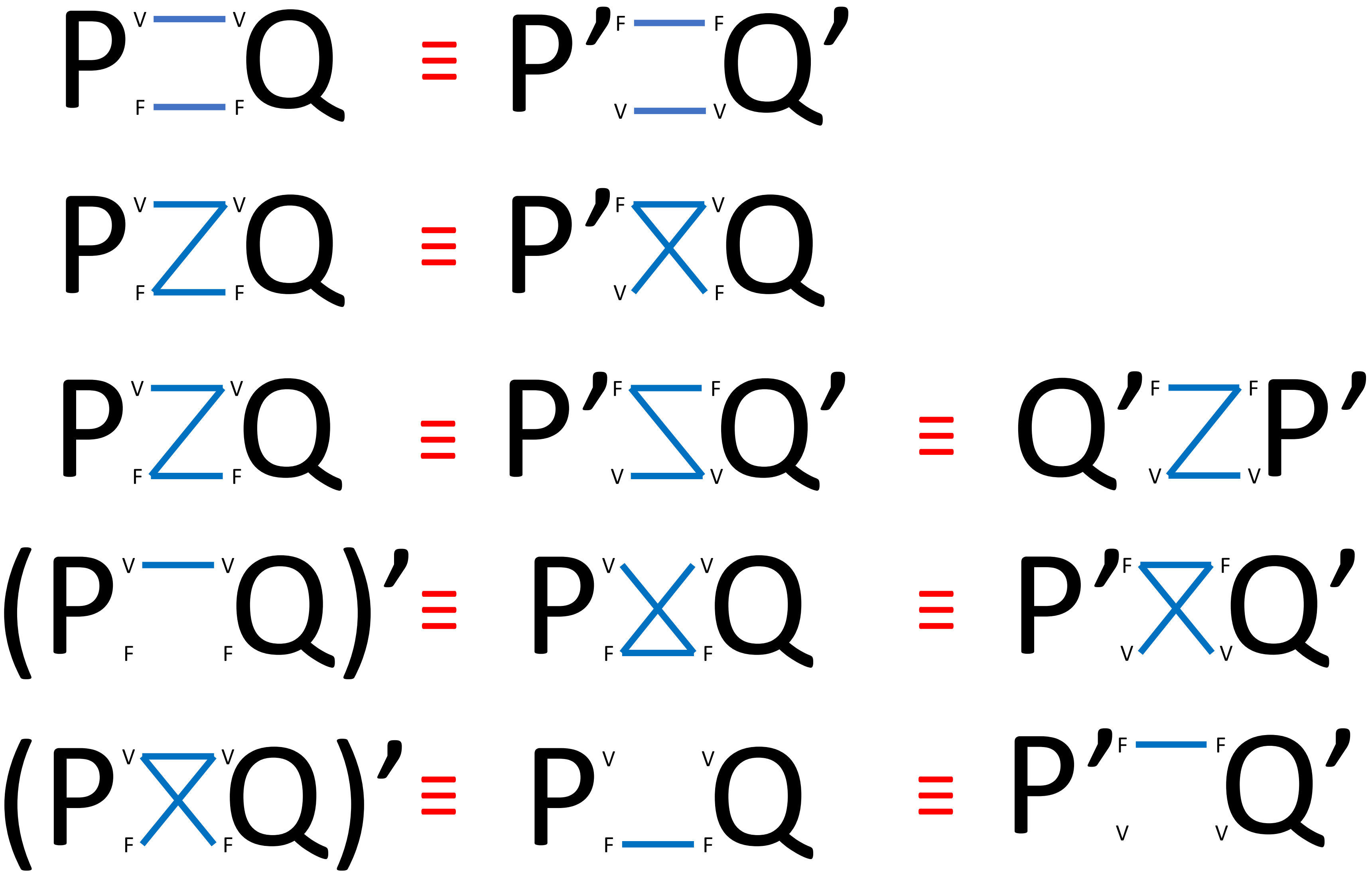
$(P \leftrightarrow Q) \equiv (\sim P \leftrightarrow \sim Q)$

$(P \rightarrow Q) \equiv (\sim P \vee Q)$

$(P \rightarrow Q) \equiv (\sim Q \rightarrow \sim P)$

$\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$

$\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$



Importancia de la simbología diagramática

La simbología diagramática clarifica la dualidad de las proposiciones, la relación entre dos proposiciones y de entender las posibilidades de forma clara.

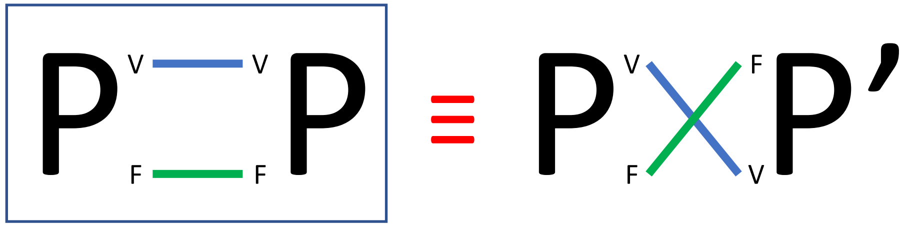
El algebra diagramática opera ágilmente las equivalencias en las negaciones parciales o totales, permitiendo encontrar algunas equivalencias de manera directa.

Al igual que los íconos, esta simbología aligera el uso de las tablas de verdad y presenta las relaciones lógicas como un juego, lo que permite la enseñanza a más jóvenes y una comprensión más profunda de las operaciones.

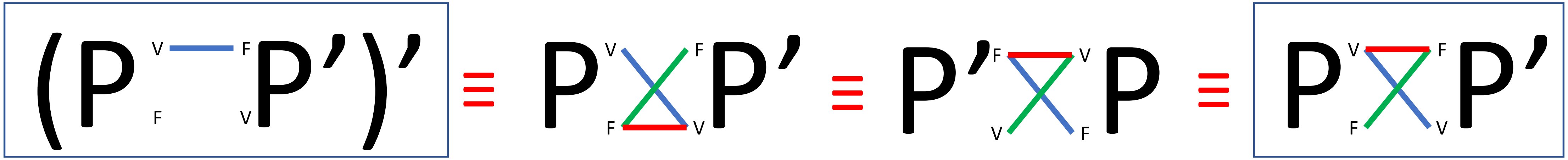
Unidad 5:
Principios en lógica proposicional

Principios de la lógica aristotélica

Principio de Identidad:

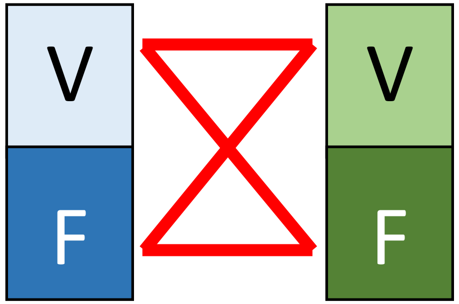


Principio de no Contradicción y Principio del tercio excluido:

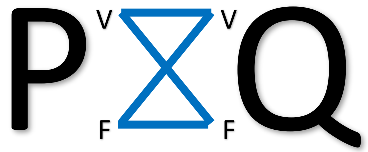


A pesar que en el último recuadro está enlazado *P* y *P’*, lo cual no es posible, el enunciado en general sí es verdadero.

Enlace general

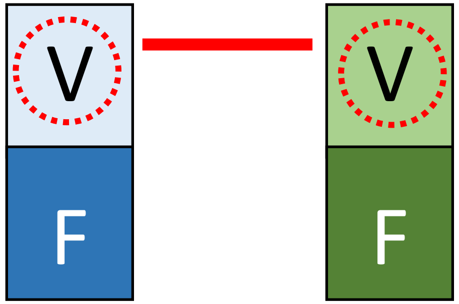


En ausencia de información sobre dos proposiciones, se puede conectarlas con un enlace general que no excluya ninguna posibilidad, es decir, que permita todas las combinaciones del tetragrama. Este enlace general representa una tautología (siempre es verdadero), ya que contiene todos los puentes de verdad.



Pero recordemos, que el objetivo es minimizar las líneas y en el mejor de los casos, lograr un monograma que muestre el resultado de verdad de cada proposición.

Único puente de verdad



El monograma dentro de un binomio que es verdadero significa que es el único puente de verdad entre las dos proposiciones, por lo tanto determina el valor de verdad individual. Por ejemplo, en la conjunción, se infiere que cada una de las proposiciones individuales es verdadera.

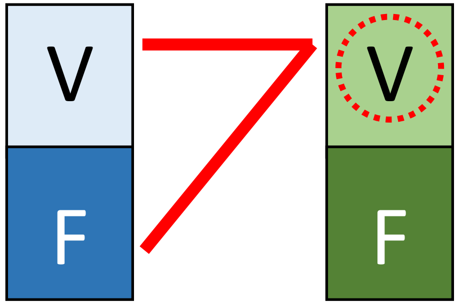
Ejemplos:

$(P \,\overline{\quad}\, Q)^{\circ}$ por lo tanto ambas son verdad (P° ; Q°)

$(M \diagup N)^{\circ}$ por lo tanto M es falso y N es verdad (M_{o} ; N°)

El individualizar el resultado, se conoce como propiedad de reducción..

Bigrama convergente



Un bigrama convergente apunta a un solo valor de verdad, por lo tanto, determina el valor de verdad de una de las proposiciones.

Ejemplos:

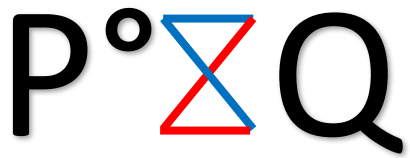
$(P \,\text{⁊}\, Q)^{\circ}$ por lo tanto Q es verdad (Q°)

$(M \angle N)^{\circ}$ por lo tanto M es falsa ($M_{\circ}$)

En estos casos, como no tiene importancia el valor de verdad de la otra proposición, esta se puede obviar.

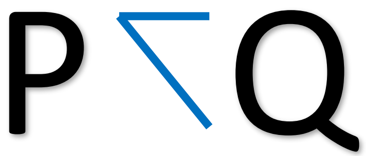
El diagrama denota posibles puentes de verdad

Analizaremos los puentes de verdad si queremos unir a una proposición P verdadera con otra proposición Q.



Vemos que los dos puentes que contienen P° (en azul) son posibles puentes de verdad, es decir, que podrían contener el valor de verdad de ambas, mientras que los puentes de verdad que contienen P_{o} (en rojo) nunca serían probables, por ello los descartamos.

Por lo tanto se puede escribir como



Amplificación o adición en lógica

La ley de amplificación en lógica dice que: si P es verdad, entonces "P o Q" también lo será. Simbolizado es:

Si P° por lo tanto $(P \overline{\times} Q)^{\circ}$

Notar que el símbolo contiene las líneas que unen P° con ambas posibilidades de Q, lo cual cumple con cubrir los puentes de verdad posibles, pero también tiene el puente de verdad que une $P_{\circ}$ con Q°, que sabemos que no es posible, pero aún así el binomio es válido. Esto debido a que el símbolo puede contener alguna línea en exceso.

Afirmación de un binomio verdadero

En inferencias es sobreentendido que estamos afirmando un binomio, por lo que no usamos el símbolo de verdadero, por ejemplo:

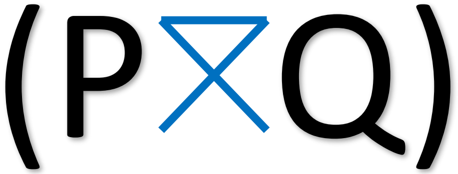
Si P por lo tanto $(P \overline{\times} Q)$

Se debe entender que se está indicando que P es verdad, por lo tanto $(P \overline{\times} Q)$ es verdad.

En el capítulo de inferencias o deducciones lógicas, las premisas y conclusiones, generalmente presentadas como lista o lista numerada, siempre serán verdaderas, por lo que no será necesario el uso continuo del símbolo de verdad (°).

Adición de puentes de verdad

El aumentar puentes de verdad a un diagrama, no invalida la veracidad del binomio, esto es porque aún contiene los puentes posibles.

Si  por lo tanto 

Si  por lo tanto 

Esto no es muy usado porque es mejor descartar los puentes que no son posibles. Es claro que no se trata de una equivalencia.

¿Cuándo un binomio es verdadero?

El binomio es verdadero si contiene todos los posibles puentes de verdad.

Ejemplo: Debo responder a las preguntas de otros porque solo yo sé que $P_\circ$ y Q°, es decir, se cumple $(P\diagup Q)$. Ellos hacen estas preguntas:

- ¿Es un monomio? … respondo que sí.
- ¿Se cumple $P\overline{\times}Q$? … respondo que sí.
- ¿Se cumple $P\overline{\underline{\quad}}Q$? … respondo que no.
- ¿Es $P\diagdown Q$? … respondo que no.
- ¿Es $P\diagup Q$, cierto? … respondo que sí.

Idempotencia

Dos expresiones son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

Si una operación es idempotente, no importa cuántas veces la ejecutes, el resultado final será el mismo resultado de la primera ejecución.

P	P ¯ P	P X̄ P
V	V	V
F	F	F
≡	P	P

Es decir que P ¯ P ≡ P X̄ P ≡ P

Leyes conocidas con valores de verdad

Dos expresiones son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

Usando las tablas de verdad podemos verificar las leyes indicadas.

- $P \wedge F \equiv F$
- $P \vee F \equiv P$
- $P \wedge V \equiv P$
- $P \vee V \equiv V$

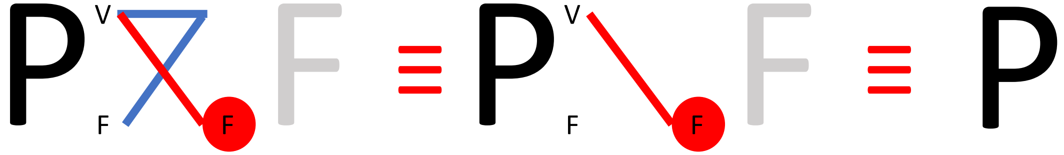
P	V	F	$P \wedge F$	$P \vee F$	$P \wedge V$	$P \vee V$
V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V
Equivale a:			F	P	P	V

Análisis diagramático de leyes con Falso

- $P \wedge F \equiv F$

Analizamos que no es posible usar el puente de verdad existente, es decir, que siempre será falso, es decir, es una contingencia.

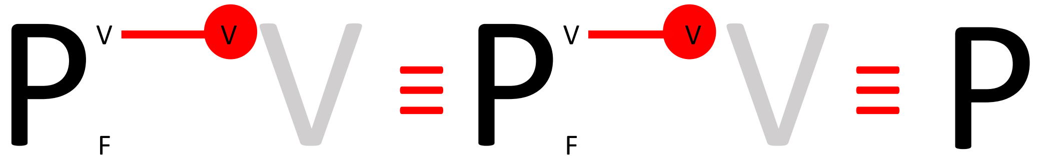
- $P \vee F \equiv P$



Analizamos que solo existe un puente de verdad posible P⟍Q. Con este diagrama no se puede concluir un resultado, solo que será verdadero cuando P° y falso cuando $P_{\circ}$, lo cual corresponde a la tabla de verdad de P, es decir, que es equivalente a P.

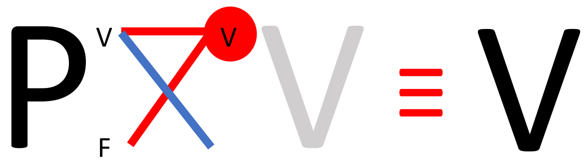
Análisis diagramático de leyes con Verdadero

- $P \land V \equiv P$



Existe un puente de verdad, por lo que no se concluye un resultado directo. Si P es verdadero, el resultado será verdadero y si P es falso, el resultado será falso, lo cual corresponde a la tabla de verdad de P.

- $P \lor V \equiv V$



Tenemos un bigrama convergente, es decir, que sin importar el valor de P, el resultado siempre es verdad, es decir, que es una tautología.

Unidad 6:
Propiedades en binomios simples

Conjunción de dos binomios similares

Si tenemos dos binomios verdaderos que enlazan las mismas proposiciones (similares), ambos deben contener los posibles puentes de verdad, por lo tanto usaremos el conectivo que resulta de la intersección de diagramas.

Si (P Q) y (P Q) Por lo tanto. (P Q)

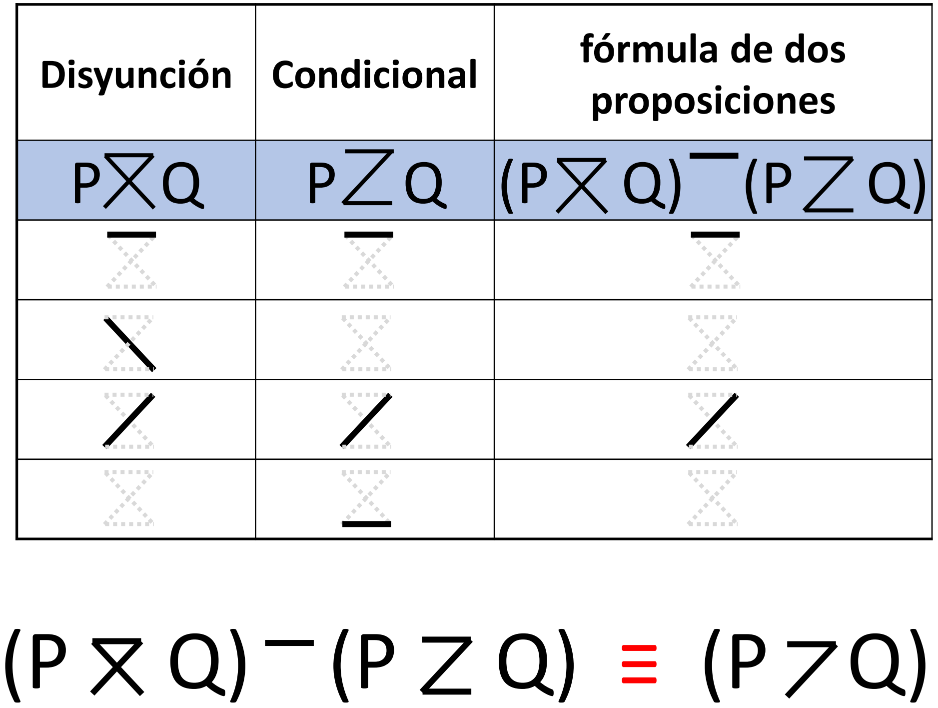
Si (R S) y (R S) Por lo tanto (R S)

Visualmente, si tenemos una conjunción de binomios similares, podemos descartar los puentes que no se repiten.

Tablas de verdad de Conjunción de similares

La conjunción es verdadera cuando es verdadera en cada caso, traducido a símbolos significa que sí está la línea en ambos, también está en el resultado.

Disyunción	Condicional	fórmula de dos proposiciones
P v Q	P → Q	(P v Q)^(P → Q)
V	V	V
V	F	F
V	V	V
F	V	F



Disyunción de dos binomios similares

Si tenemos la disyunción de dos binomios similares, cualquiera de los dos puede contener los posibles puentes de verdad, por lo tanto usaremos el conectivo que resulta de la unión de diagramas.

Si (P Q) o (P Q) Por lo tanto (P Q)

Si (R S) o (R S) Por lo tanto (R S)

Visualmente, si tenemos una disyunción de binomios similares, podemos incorporar los puentes que no se repiten.

Tablas de verdad de Disyunción de similares

La disyunción es verdadera cuando alguna proposición es verdadera, traducido a símbolos significa que si está en alguna, esta en el resultado.

Conjunción	**Disyunción exclusiva**	**fórmula de dos proposiciones**
P ^ Q	PΔQ	(P v Q)v(P → Q)
V	F	V
F	V	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción	**Disyunción exclusiva**	**fórmula de dos proposiciones**
$P \,\bar{}\, Q$	$P \times Q$	$(P \,\bar{}\, Q)\,\bar{\times}\,(P \times Q)$

$$(P \,\bar{}\, Q)\,\bar{\times}\,(P \times Q) \equiv (P \,\bar{\times}\, Q)$$

Ejercicios de conjunción y disyunción

Si sabemos que conjunción (¯), genera una intersección y que disyunción (⌧) es una unión de los puentes de verdad, veamos algunos ejercicios de equivalencias al respecto:

- (P∠Q)¯(Q∠P) ≡ (P∠Q)¯(P⦣Q) ≡ (P⩦Q)
- (R⌧S)¯(R⊻S) ≡ (R×S)
- (M⩦N)¯(M⌧N) ≡ (M¯N)
- (T∕U)⌧(T∖U) ≡ (T×U)
- (A¯B)⌧(A’¯B’) ≡ (A¯B)⌧(A_B) ≡ (A⩦B)

Unidad 7:
Propiedades en binomios compuestos

Binomios compuestos

Un binomio compuesto tiene más de un conector lógico, uno de los cuales siempre es el principal (o dominante) porque tiene mayor alcance en la expresión. En la estructura se usan agrupamientos como () [] y {}, y es común que el conector principal esté fuera de estos signos.

Ejemplos:

(PZQ)×R   Bicondicional

M‾(NX̄L)   Disyunción

[(SX̲T)ΣU]X̄S   Conjunción

Tablas de verdad de un binomio compuesto

La tabla de verdad de una expresión con *n* proposiciones genera *2^n* combinaciones de verdad y falso, en el caso de tres proposiciones, serán ocho combinaciones.

Ejemplo: $(P \overline{\times} Q) \overline{\angle} R$

P	Q	R	$(P \overline{\times} Q)$	$\overline{\angle}$ R
V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	**F**
V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	V	**V**
F	V	F	V	**F**
F	F	V	F	**V**
F	F	F	F	**V**

Propiedades asociativa y distributiva

La demostración por tablas de verdad puede verificar los dos siguientes casos de equivalencia:

<u>Asociativa:</u>

- P ¯ (Q¯R) ≡ (P¯Q) ¯ R
- P ⊼ (Q⊼R) ≡ (P⊼Q) ⊼ R

<u>Distributiva:</u>

- P ¯ (Q⊼R) ≡ (P¯Q) ⊼ (P¯R)
- P ⊼ (Q¯R) ≡ (P⊼Q) ¯ (P⊼R)

Binomios compuestos y redundantes

Cuando un binomio compuesto tiene una proposición que se repite y tiene un monograma como conectivo principal, es muy probable que la expresión se pueda reducir.

Ejemplo:

Reducir la expresión $(P \times Q) \diagup P$

Sabemos que $P \equiv P \,\overline{\diagdown}\, Q$, por lo que reemplazamos en la expresión

$$(P \times Q) \diagup (P \,\overline{\diagdown}\, Q) \equiv (P \,\overline{\underline{\ \ }}\, Q) \,\overline{\ \ }\, (P \,\overline{\diagdown}\, Q) \equiv P \,\overline{\ \ }\, Q$$

Unidad 8:
Inferencias lógicas

Símbolo que presenta una conclusión: “⇒“

Son diferentes los símbolos que indican que se ha efectuado una inferencia o conclusión, entre los cuales destacan $\therefore$, >, $\vdash$ y el símbolo $\Rightarrow$, que será el que nosotros usemos en este curso.

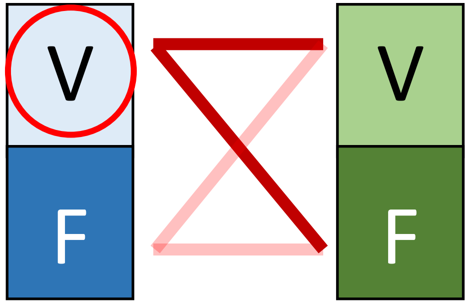
Esto comúnmente se lee “por lo tanto”, y señala que la proposición que sigue es una consecuencia lógica de las premisas.

$P \angle Q$: Si llueve, entonces la calle se moja

P : Llueve

$\Rightarrow Q$: La calle está mojada

Descarte de caminos de verdad



Si tenemos un binomio y adicionalmente se nos brinda un valor de verdad de una de las proposiciones, esto puede descartar algunos caminos de verdad que no ocurrirán.

Ejemplos:

$$P^{\circ}\angle Q \quad \Rightarrow \quad P^{-}Q$$

$$M\Sigma_{\circ}N \quad \Rightarrow \quad M\underline{\diagdown}N$$

Notar que ya no se usa el símbolo de verdad cuando es evidente.

Las premisas o antecedentes

En lógica proposicional, las premisas son proposiciones que se consideran verdaderas y son usadas como base para un razonamiento o argumento conocido como conclusión.

Las premisas se clasifican en dos, a) simples o atómicas, que enuncian el valor de una única proposición sin conectivos (por ejemplo: P’, Q), y b) compuestas, que incorporan conectivos lógicos para vincular dos o más proposiciones simples (por ejemplo: $P \times Q$)

Recordar que en premisas se entiende que P es P° y Q’ es Q。

Premisas, análisis y conclusiones

La inferencia se presenta en forma de lista de premisas, las cuales son verdaderas (símbolo de verdad sobreentendido).

1) $P \overline{\times} Q$
2) P'

   Análisis: $P_{\circ} \overline{\times} Q \;\Rightarrow\; P / Q \;\Rightarrow\; Q^{\circ}$

3) $\Rightarrow Q$

La conclusión es que Q es verdadero

Inferencias o deducciones

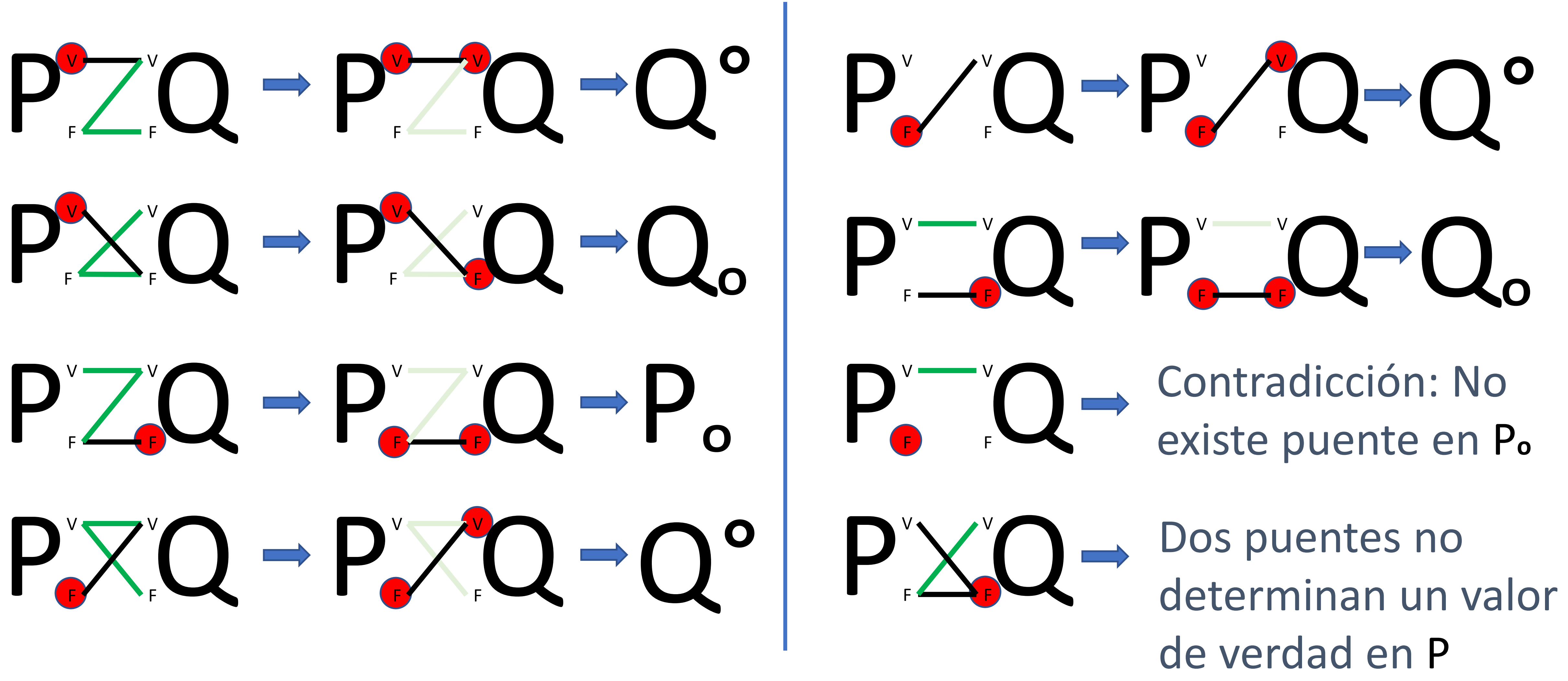
Uno de los objetivos principales de la lógica proposicional es estudiar y analizar la validez de los razonamientos o deducciones.

En general se busca conocer el valor de verdad de alguna proposición o relacionar diferentes variables entre sí con expresiones más sencillas.

Esto se logra analizando cada camino de verdad posible y desechando aquellos que no son posibles, para así reducir las expresiones, dando como conclusión una nueva proposición atómica o compuesta.

Por lo general se tiene una lista de premisas para lograr una o varias conclusiones, las cuales se pueden separar por comas o presentarlas en columna en forma de viñetas o numeración.

Ejercicios de descarte y conclusión



Inferencias más conocidas

La inferencia con los símbolos es seguir el único puente de verdad disponible.

Modus ponendo ponens: $P\angle Q;\ P \Rightarrow P^{\circ}\angle Q \Rightarrow P^{\overline{\ \ }}Q \Rightarrow Q$

Modus ponendo tollens: $P\underline{\times}Q;\ P \Rightarrow P^{\circ}\underline{\times}Q \Rightarrow P\diagdown Q \Rightarrow Q'$

Modus tollendo tollens: $P\angle Q;\ Q' \Rightarrow P\angle_{\circ}Q \Rightarrow P\_Q \Rightarrow P'$

Modus tollendo ponens: $P\overline{\times}Q;\ P' \Rightarrow P_{\circ}\overline{\times}Q \Rightarrow P\diagup Q \Rightarrow Q$

Ley asociativa y distributiva en lógica

Existen algunas propiedades para la conjunción y disyunción, que en ocasiones se asemejan a la intersección y unión de conjuntos, o a la suma y multiplicación en números:

Ley asociativa:

P¯(Q¯R) ≡ (P¯Q)¯R

P⌧(Q⌧R) ≡ (P⌧Q)⌧R

Ley distributiva:

P¯(Q⌧R) ≡ (P¯Q)⌧(P¯R)

P⌧(Q¯R) ≡ (P⌧Q)¯(P⌧R)

Unidad 9:
Polinomios o cadenas de proposiciones

Relación entre tres proposiciones: Trinomio

El tetragrama ⧖ representa las cuatro posibilidades o caminos de verdad entre dos proposiciones. En el caso de tres proposiciones se pueden representar las ocho probabilidades de la tabla de verdad de manera lineal en la siguiente estructura:

$$P ⧖ Q ⧖ R$$

Ejemplo:

Si deseamos mostrar P°, $Q_{\circ}$ y $R_{\circ}$, entonces se escribirá así: $P \diagdown Q \underline{\quad} R$

Esta unión de puentes se llama “camino de verdad”.

Ocho opciones en la tabla de verdad

P	Q	R	TRINOMIO	REDUNDANTE
V	V	V	P¯Q¯R	P¯Q¯R¯P
V	V	F	P¯Q╲R	P¯Q╲R╱P
V	F	V	P╲Q╱R	P╲Q╱R¯P
V	F	F	P╲Q_R	P╲Q_R╱P
F	V	V	P╱Q¯R	P╱Q¯R╲P
F	V	F	P╱Q╲R	P╱Q╲R_P
F	F	V	P_Q╱R	P_Q╱R╲P
F	F	F	P_Q_R	P_Q_R_P

Traslado de premisas a un trinomio

Para evaluar en el trinomio todas las posibilidades, debemos trasladar los caminos de verdad entre las premisas.

Ejemplo:

1) P=Q

2) QZR

Al trasladar estas premisas a un trinomio tendríamos

3) P=QZR

A este trinomio también lo consideraremos una premisa, el cual es equivalente a las dos anteriores.

Caminos de verdad en un trinomio

A través de los puentes de verdad del polinomio se debe visualizar al menos un "camino de verdad" que atraviesa un solo valor de todas las proposiciones del polinomio.

Los caminos de verdad son los posibles resultados del sistema de proposiciones. Sí solo hay un camino de verdad, este es el resultado.

Si algún puente no forma parte de un camino de verdad, este nunca será posible para la solución, por ello se puede descartar de la solución final.

$$P \mathrm{Z} Q \overline{\underline{\;\;}} R \times S \setminus T \;\Rightarrow\; P \underline{\;\;} Q \underline{\;\;} R / S \setminus T \;\Rightarrow\; P_{\circ};\ Q_{\circ};\ R_{\circ};\ S^{\circ};\ T_{\circ}$$

Enlace entre extremos de un trinomio

Si tenemos el trinomio $P\overline{\underline{}}Q\angle R$ como premisa del caso anterior, ¿Cuáles caminos de verdad podemos encontrar entre P y R?

Primero veamos las opciones que inician en P°:

$$P\,\overline{}\,Q\,\overline{}\,R \Rightarrow P\,\overline{}\,R$$

Luego los caminos que inician en $P_{\circ}$:

$$P\,\underline{}\,Q\,/\,R \Rightarrow P\,/\,R \qquad \text{y} \qquad P\,\underline{}\,Q\,\underline{}\,R \Rightarrow P\,\underline{}\,R$$

De esta manera vemos que los caminos posibles entre P y R se ven representados en el siguiente conectivo lógico:

$$P\angle R$$

Ejemplos de trinomios y enlace de extremos

Premisa 1	Premisa 2	Trinomio	Extremos
$P\overline{\underline{\ \ }}Q$	$Q\overline{\underline{\ \ }}R$	$P\overline{\underline{\ \ }}Q\overline{\underline{\ \ }}R$	$P\overline{\underline{\ \ }}R$
$P\times Q$	$Q\times R$	$P\times Q\times R$	$P\overline{\underline{\ \ }}R$
$P\overline{\underline{/}}Q$	$Q\overline{\underline{/}}R$	$P\overline{\underline{/}}Q\overline{\underline{/}}R$	$P\overline{\underline{/}}R$
$P\overline{\underline{\backslash}}Q$	$P\overline{\underline{\backslash}}R$	$P\overline{\underline{\backslash}}Q\overline{\underline{\backslash}}R$	$P\overline{\underline{\backslash}}R$
$P\overline{\ \ }Q$	$P\overline{\ \ }R$	$P\overline{\ \ }Q\overline{\ \ }R$	$P\overline{\ \ }R$
$P\overline{\times}Q$	$P\overline{\times}R$	$P\overline{\times}Q\overline{\times}R$	$P\overline{\underline{\times}}R$

En el último ejemplo se tiene como posible todas las opciones entre P y R.

Propiedad de Transferencia

Se conocen las siguientes propiedades:

Si P=Q y Q=R entonces P=Q=R o también P=R

Si PZQ y QZR entonces PZQZR o también PZR

Por otra parte tenemos que

Si P×Q y Q×R entonces P×Q×R pero en este caso resulta P=R

Tomaremos la notación en cadena para relacionar dos a dos las variables y también analizaremos la manera de relacionar los extremos.

Trinomio visto en una tabla de verdad

P	Q	R	(P Z Q)	‾	(Q Z R)	P Z Q Z R	
V	V	V	V	V	V	V ‾ V ‾ V	‾ ‾
V	V	F	F	F	F	V ‾ V F	
V	F	V	F	F	V	V F / V	
V	F	F	F	F	V	V F _ F	
F	V	V	V	V	V	F / V ‾ V	/ ‾
F	V	F	F	F	F	F ‾ V F	
F	F	V	V	V	V	F _ F / V	_ /
F	F	F	V	V	V	F _ F _ F	_ _

Los caminos que cruzan la cadena son caminos de verdad porque crean una posibilidad para cada variable.

Para los extremos son equivalentes /‾ y _/, pero este se cuenta una sola vez.

Ejemplos simples de trinomios

La conjunción de dos binomios con una proposición en común, es el trinomio más simple para relacionarlos en cadena.

Ejemplos:

- (P∠Q)‾(Q╳R) ≡ P∠Q╳R ≡ P∠Q╳R╳̲P
- (R╳̲S)‾(S∑T) ≡ R╳̲S∑T ≡ R╳̲S∑T╳̲R
- (A╳̲B)╲(B‗C) ≡ (A╳̲B)‾(B╳C) ≡ A╳̲B╳C ≡ A╳̲B╳C∑A

No es necesario indicar la redundancia, esta puede ser una nueva conclusión.

Trinomios redundantes

En algunas ocasiones sí es necesario usar trinomios redundantes para tener alguna conclusión.

Ejemplo: Tenemos tres premisas PZR ; QZR; PX̄Q

Una forma de formar la cadena sería: PX̄QZRꙀP

Importante: un camino no puede contener P° y $P_{\circ}$ al mismo tiempo. Solo puede iniciar y finalizar como P° y P° o en todo caso como $P_{\circ}$ y $P_{\circ}$.

Plantilla y traslado: Escribimos las mismas variables y a medida que encontramos los posibles caminos los trasladamos a la nueva cadena.

$$PX̄Q7R\text{Ꞁ}P \Rightarrow R^{\circ}$$

Si R estuviera en un extremo, hubiéramos visto que solo hay caminos por R°.

Relación entre varias proposiciones: Polinomio

Si tenemos muchas proposiciones, estas pueden representarse en una o más cadenas lineales, las que se evalúan en paralelo, con el cuidado que las proposiciones redundantes tengan un solo valor en cada camino de verdad.

P⧖Q⧖…⧖S⧖T

Q⧖…⧖R

Ejemplo de planteamiento en dos cadenas

Vemos que este es un ejemplo en dos cadenas, que resume diferentes premisas pero que no puede ser representado en una sola

P╱Q╳̅R╱̲̅S=T╱̲̅X

Q╳W╳T

Vemos que este es un ejemplo en dos cadenas y se debe buscar los caminos posibles, en este caso tendremos una solución que es:

P╱Q╲̅R╱̅S‾T‾X╲W o alguna contenida en su interior.