MATRIZ INCREMENTAL PERIODICA DE NÚMEROS PRIMOS

Autores: Flavio Moreno Coronel, Antonio Moreno Zúñiga

ANÁLISIS DE LOS PRIMOS GEMELOS

Autor: Antonio Moreno Zúñiga

MATRIZ INCREMENTAL PERIODICA DE NÚMEROS PRIMOS

Capítulo 1. Hay una periodicidad en la criba de Eratóstenes

La criba de Eratóstenes es un método sencillo y efectivo para hallar todos los números primos menores que un número N dado. Consiste en escribir todos los números naturales desde 2 hasta ese número N y, comenzando por el 2, tachar sucesivamente todos sus múltiplos. Luego se pasa al siguiente número no tachado y se repite el proceso de tachar sus múltiplos. Al continuar así hasta alcanzar la raíz cuadrada del número límite, los valores que permanecen sin tachar son precisamente los números primos.

Pero este es un proceso secuencial, además podemos observar una periodicidad en cada paso, como tachar los pares y los múltiplos de tres. Ambos tachados son periódicos y si lo vemos en conjunto se sincronizan en los múltiplos de 6.

Tachados de 2

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
…	…	…	…	…	…

Tachados de 2 y 3

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
…	…	…	…	…	…

Si tachamos los múltiplos de 5 veremos que ahora se sincronizan en un periodo múltiplo de 30.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Ahora analizamos los números restantes que han quedado sin tacha que son en su mayoría números primos

1	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	49	53	59
61	67	71	73	77	79	83	89
91	97	101	103	107	109	113	119
…	…	…	…	…	…	…	…

Veamos esta misma tabla pero solo con el valor de incremento respecto al anterior, es decir, 1+**6**=7; 7+**4**=11; 11+**2**=13, etc.

[1]	6	4	2	4	2	4	6
2	6	4	2	4	2	4	6
2	6	4	2	4	2	4	6
2	6	4	2	4	2	4	6
	…	…	…	…	…	…	…

En esta última tabla existe un ciclo periódico de los incrementos de valor respecto al número anterior y genera la lista de confirmados y posibles números primos.

Esta tabla es posible refinarla paso a paso, de forma progresiva para cada número primo, de manera que sea más sencillo demostrar algunas propiedades de los números primos por inducción matemática, es decir, verificar que una propiedad se cumple en las primeras listas incrementales, suponer que la propiedad es cierta para un número natural cualquiera N (la hipótesis de inducción), y demostrar que también se cumple para el siguiente número N+1.

Capítulo 2. Análisis de las listas incrementales

La idea de usar el valor incremental, como diferencia con respecto al número anterior, ayuda a proyectar una lista que puede usarse repetidas veces.

Veamos cómo sería la lista incremental luego de tachar los múltiplos de 2

Generación de lista incremental P_1=2

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Incrementa en	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Múltiplos a tachar		x		x		x		x		x		x		x	
Lista incremental: 2	1		2		2		2		2		2		2		2

Al tachar un valor, acumulamos en el número siguiente este incremento, en este caso, la suma del 1 tachado con el 1 a su derecha resulta 2 en la nueva Lista incremental.

Siempre el primer paso es tachar el primer número de la lista, que aumentado en 1 será el primer número primo confirmado (porque no ha sido tachado antes) y todos sus múltiplos posteriores; de esta manera usaremos solo los números impares en el paso siguiente.

Generación de lista incremental P_2=3

Número	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
Lista Incremental: 2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Múltiplos a tachar		x			x			x			x			X	
Lista incremental: 3	1		4	2		4	2		4	2		4	2		4

Analizaremos paso a paso como se generó la lista incremental del 3:

Tachamos el número primo a analizar (el primer 2 de la lista incrementado en uno) y sus múltiplos, podemos encontrar los siguientes múltiplos sumando los incrementos que están a la derecha del valor tachado, es decir, usamos la propiedad que la suma de dos múltiplos de un número sigue siendo un múltiplo de ese número.

En este caso, después de tachar el 2 (que representa al 3), iniciamos con el 2 que representa al número 5 y sumamos el 2 que representa el 7, la suma de estos es 4, que no es múltiplo de 3, por lo que aumentamos la suma el 2 que representa el 9, la suma que es 6, que sí es múltiplo de 3, por lo tanto la tachamos también, partiendo ahora con la suma en cero para encontrar el siguiente múltiplo de 3 a tachar.

Ya que hemos usado los primeros dos primos, nuestra lista la mantenemos aparte:

Lista progresiva de números primos = {P1, P2, P3, …} = {2, 3, …}

Vemos que el ciclo {4, 2} se repite después de analizar el número primo 3. Esta nueva lista incremental la usaremos para analizar el número primo 5.

Hemos usado los dos primeros primos {2, 3}, por lo que estos valores y sus múltiplos ya no son representados en la lista incremental siguiente. Ahora usaremos la nueva lista incremental que siempre inicia con 1 y después con la parte periódica {4, 2} que repetimos muchas veces para encontrar los múltiplos de 5 y encontrar la nueva periodicidad.

Lo más importante es que esta lista representa los valores de manera incremental de los posibles números primos.

<u>Generación de lista incremental P_3=5</u>

Número	1	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35	37	41	43	…
Lista Incremental: 3	1	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	…
Múltiplos a tachar		P_3							X			x				
Lista incremental: 5	1		6	4	2	4	2	4		6	2		6	4	2	

47	49	53	55	59	61	65	67	71	73	77	79	83	85	89	91	95	97	101
4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4
			x			x							x			x		
4	2	4		6	2		6	4	2	4	2	4		6	2		6	4

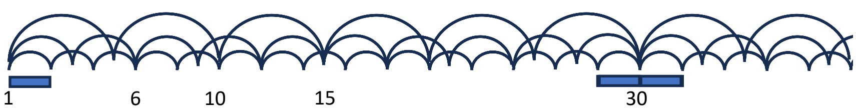
Es claro que tachamos el primer 4 que representa a 5, después iniciamos la suma hasta encontrar un múltiplo de 5, en este caso, 2+4+2+4+2+4+2=20, que tachamos por ser un múltiplo de 5. Vemos que el primer tachado representa al número 25, que es 5^2, lo cual es evidente porque su descomposición canónica no contiene un primo anterior.

Después de haber tachado este número, reiniciamos la suma de los incrementos siguientes hasta encontrar el próximo múltiplo de 5, 4+2+4=10, tachando entonces el número que representa al 35. Observamos que 35=5*7, donde 7 es el próximo número representado en nuestra lista, lo cual era de esperarse porque los múltiplos de 7 se tacharan en la generación siguiente lista. Al continuar con el proceso de la suma, 2+4+2+4+2+4+2=20, vemos que será 55=5*11. Observamos que los primeros tachados son 5*5, 5*7, 5*11,… que son los primos que se verifican al inicio de la lista.

Hemos encontrado entonces la parte periódica incremental que genera los números que se deben analizar para ser tachados en el próximo paso: {6, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2}, es decir, los números a analizarse serán 1+**6**=7, 7+**4**=11, 11+**2**=13, 13+**4**=17, 17+**2**=19, 19+**4**=23, 23+**6**=29, 29+**2**=31 y seguimos nuevamente usando esta parte periódica desde el inicio 31+**6**=37, 37+**4**=41, 41+**2**=43, etc.

La suma de los incrementos de esta lista de 8 elementos resulta 30, es decir, que esta lista solo se enfoca en analizar los 8/30 de los números para saber si son primos.

Al igual que el mínimo común múltiplo de varios números enteros generan una intersección de los elementos, vemos que al ser todos primos de primer orden, es la multiplicación de ellos el factor que hace que formemos la periodicidad de los elementos, lo cual vemos en el siguiente esquema:



En la recta numérica graficamos los saltos de los primeros primos 2, 3 y 5, por lo que vemos intercepciones parciales en 6, 10, 15; pero las tres se interceptan en 30 que es la multiplicación de ellos. Veremos que la parte cíclica que se repite es del 1 al 30, del 31 al 60, etc., pero debido a que los múltiplos de 30 son tachados en la lista, los números que sí figuran son el 29 y el 31. Agrupando el 1 de la izquierda y el 1 de la derecha, marcados con azul, siempre tendremos un 2 que será asimétrico al lado derecho, de igual manera, sabemos que siempre empezamos la lista sumando 1 a la izquierda.

Al hacer la lista periódica incremental, notamos que el ciclo siguiente inicia con el número que representa la multiplicación de (2*3+1)*5, es decir, el producto del valor primo analizado con la multiplicación de los primos analizados anteriormente más 1.

Es preciso notar, que el gráfico tiene una reflexión espejo del 1 al 15 respecto del 15 al 30. Esto lo utilizaremos más adelante, recordando que en las listas siempre figurará un 2 al lado derecho que hemos indicado será asimétrico porque representaba un 1 a la derecha para alcanzar al MCM o la productoria de los primos anteriores, con el 1 siguiente que se ubicaría al lado izquierdo. Podemos observar la simetría espejo en el siguiente gráfico:

[1]	6	4	2	4	2	4	6	[1]
1	6	4	2	4	2	4	6	[1]
1	6	4	2	4	2	4	6	[1]
1	6	4	2	4	2	4	6	[1]
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Capítulo 3. Presentación en una matriz de las listas incrementales

Sabiendo la lista periódica incremental de un número anterior, podemos crear una disposición en matriz para analizar el siguiente primo. Por ejemplo.

Sabemos que luego de analizar el número 2 y 3, tenemos la lista {4, 2}; en el caso que necesitemos analizar el siguiente primo que sería el 5, repetimos esta lista en forma de una matriz de 5 filas y 2 columnas, tal como se muestra a continuación:

Generación de matriz incremental P_3=5

[1]	4	2
	4	2
	4	2
	4	2
	4	2
	4	2
	4	2
	4	2
	4	2
	4	2
	4	2

Esta disposición muestra fácilmente que el ciclo comienza cuando se ha marcado el primer valor que está en la columna de la izquierda, en este caso el 4, que representa al primo a analizarse [1]+4=5; el siguiente ciclo inicia en la sexta fila con el 4 que es la multiplicación del primo analizado con el producto de todos los primos analizados anteriormente más uno, es decir, en este caso representa al (2*3+1)*5=35, que por construcción no es múltiplo de ninguno anterior.

Sin contar el 1 inicial, La suma de los elementos de la matriz es 30, debido a que la primera fila suma 2*3 y que añadimos 5 columnas para completar el ciclo. Este hecho hace que el último 2 de la tabla cíclica inicial es la multiplicación de los primeros primos analizados aumentado en 1, en este caso, 31.

Usando la lista incremental P_3=5, analicemos la matriz de P_4=7 que tendrá 7 filas y una más de comprobación, en donde podemos encontrar el valor de (2*3*5+1)*7=217, que es el valor que será tachado y que inicia el ciclo. Asimismo el último 2 en la tabla representa 2*3*5*7+1=211

[1]	6	4	2	4	2	4	6	2
	6	4	2	4	2	4	6	2
	6	4	2	4	2	4	6	2
	6	4	2	4	2	4	6	2
	6	4	2	4	2	4	6	2
	6	4	2	4	2	4	6	2
	6	4	2	4	2	4	6	2
	6	4	2	4	2	4	6	2

En esta matriz se ve claramente que se tacha un solo valor en cada columna en cada ciclo, si esto no fuera así se tendría un ciclo repetitivo al interior, que no es posible. Recordemos que la suma de los elementos de una fila es 2*3*5, por ello, si hemos tachado un múltiplo de 7, al sumarle este factor que no es múltiplo de 7, el resultado nunca será múltiplo de 7.

Finalizado el ciclo, el primer valor de la fila 8, siempre será tachado porque corresponde a la multiplicación de los primos analizados hasta el momento, en este caso, (2*3*5+1)*7=217.En este caso, este valor también corresponde al número representado al final de la primera fila multiplicado por 7. Excluyendo este elemento, el resto de los elementos de la primera fila multiplicados por 7 aún están pendientes de ser tachados y son menores a este último, por ello deben estar dentro del primer ciclo y son en número idéntico al número de columnas excluyendo la primera que es el primo a analizar, es decir, estos valores serán los tachados dentro del primer ciclo. De esta forma notamos que el primer tacha después del primo a analizarse, siempre corresponde al cuadrado del valor, que el primer elemento de la primera fila por 7, luego se tachará el segundo elemento 11 multiplicado por 7 y así sucesivamente.

Hemos visto entonces, que la primera fila predice los valores a ser tachados en el primer ciclo, lo cual hará posible generar la siguiente matriz. Además los incrementos entre cada elemento de la primera fila multiplicados por 7 serán los incrementos entre los valores tachados.

Sabemos además, que si tachamos un valor "***t***", este será múltiplo de 7, por lo tanto también se debe tachar el valor simétrico que resulta de (2*3*5+1)*7-***t*** , esto hace que la nueva lista (excluyendo el 2 de la derecha) sea simétrica, es decir, que bastaría el análisis solo hasta la mitad de los elementos, pero igual mostraremos la matriz completa por el momento.

La nueva lista es {10, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 2, 4, 8, 6, 4, 6, 2, 4, 6, 2, 6, 6, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 2, 10, 2 } en donde vemos el último 2 que es asimétrico porque debería ser un 1 al inicio y al fin de cada fila, pero que lo hemos puesto a la derecha de forma acumulada, y observamos que el valor central es el número 4, es decir, que desde el 10 inicial hasta ese 4 es una simetría espejo con la otra mitad, del 4 hasta el último 10 de la fila.

Esta tabla contenía 56 elementos dispuestos en 8 columnas y 7 filas, como se han tachado un elemento por columna, la nueva lista de P_5=11 será de 56-8=48 elementos, y la matriz será de 48 columnas y 11 filas.

En la lista incremental del P_5=11 se muestran los primeros valores que representan los primos sin tachar {11, 13, 17, 19, …}, que representan al mismo tiempo, el factor necesario para encontrar los múltiplos de 11 en la propia lista, es decir, los primeros múltiplos a tacharse son 11*11, 11*13, 11*17, 11*19, etc. Esto hace muy simple encontrar los siguientes números a tacharse, más si usamos la forma incremental, es decir, que después de tachar 11*11, los incrementos a sumarse darán como resultado 11*2, luego 11*4, luego 11*2, y así sucesivamente.

Capítulo 4. Propiedades de las Matriz incremental de números primos

Hemos observado algunos lineamientos de las matrices, para ello indicamos aquellos que son obvios porque son hechos por construcción y aquellos que se pueden deducir.

i. La matriz no considera el 1 inicial, pero sí debe incrementarse al primer valor para representar al primo a analizarse denominado $\boldsymbol{p_k}$.
ii. La matriz contiene los valores que no son múltiplos de los primos menores a $\boldsymbol{p_k}$, es decir, la matriz representa a los posibles primos mayores e igual a $\boldsymbol{p_k}$.
iii. La primera fila se construye con los valores sin tacharse de la matriz anterior.
iv. Todas las filas siguientes son repeticiones de la primera fila
v. El primer elemento de la matriz, $\boldsymbol{p_k}$, siempre se tacha y se adjuntará a la lista de primos confirmados, $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}=\{2, 3, \ldots, p_{k-1}\}$, los cuales ya no figuran en la matriz.
vi. La columna de la derecha siempre es 2 porque acumula un 1 de la derecha y el consecutivo que iniciaría a la izquierda, lo que haría que sea simétrico.
vii. El valor importante que genera el ciclo repetitivo, es la multiplicación de los primos menores a $\boldsymbol{p_k}$, pero al ser tachado por ser múltiplo, lo encontramos en medio del 2 descrito al lado derecho en la primera fila.
viii. Los elementos de la primera fila tiene un valor sumado igual a la multiplicación de los números primos anteriores a $\boldsymbol{p_k}$, esto es $\prod_{i=1}^{k-1} p_i$.
ix. La cantidad de filas en la nueva matriz, es igual a $\boldsymbol{p_k}$, lo que garantiza que sea cíclica.
x. El último valor en la matriz, que es el 2 de la derecha de la última fila, representa a la multiplicación de todos los primos menores o iguales a $\boldsymbol{p_k}$ aumentado en 1, esto es $\prod_{i=1}^{k} p_i +1$
xi. El menor factor dentro de la descomposición canónica de un número representado en la matriz es $\boldsymbol{p_k}$.
xii. El segundo elemento que a tachar en la matriz es el que representa $\boldsymbol{p_k^2}$.
xiii. Todos los números representados antes de $\boldsymbol{p_k^2}$ siempre son números primos.
xiv. Para cada elemento $\boldsymbol{q}$ que es representado en la matriz, observaremos que $\boldsymbol{q.p_k}$ tampoco habrá sido tachado.
xv. En particular, los valores $\boldsymbol{q}$ representados en la primera fila sin el último 2 de la derecha, multiplicados por $\boldsymbol{p_k}$, serán los números que debemos tachar durante el análisis de la matriz,es decir, hay una correspondencia entre los elementos de la primera fila de la matriz y los elementos tachados.
xvi. Después de tachar $\boldsymbol{p_k^2}$, podemos analizar la suma de incrementos que corresponderán con la multiplicación de $\boldsymbol{p_k}$ con el incremento entre los primeros números de la matriz correspondientes.
xvii. El valor representado por el último 2 de la primera fila multiplicado por $\boldsymbol{p_k}$ es el primer valor fuera del ciclo repetitivo.
xviii. Cada columna analizado tendrá un solo tachado dentro del primer ciclo repetitivo. Lo contrario es suponer dos tachados de la forma: $\boldsymbol{q*p_k}$, $\boldsymbol{q*p_k}$ + $s * \prod_{i=1}^{k-1} p_i$; como le primer ciclo tiene $\boldsymbol{p_k}$ filas, $\boldsymbol{s}$ es menor a $\boldsymbol{p_k}$, además, como el segundo tachado tiene un factor a $\boldsymbol{p_k}$, por lo tanto $\boldsymbol{s}$ es múltiplo de ***pk**; pero esto*

es contradictorio porque ***s*** no puede ser múltiplo de $\boldsymbol{p_k}$ si es menor a $\boldsymbol{p_k}$. Esto también es obvio porque no puede haber un sub-ciclo repetitivo al interno.

xix. La cantidad de valores a tacharse durante el análisis es igual al número de columnas de la matriz.

xx. La cantidad de elementos en una columna es igual a la productoria de los valores de los primos menores de $\boldsymbol{p_k}$ reducidos en 1, esto es $\prod_{i=1}^{k-1}(p_i - 1)$.

xxi. Un elemento tachado en la matriz es del tipo $\boldsymbol{m.p_k}$, tiene un correspondiente, o un valor espejo, en el producto $\prod_{i=1}^{k} p_i - m.p_k$, es decir, los elementos de la primera fila sin el 2 de la derecha, generan una secuencia capicúa.

xxii. Son todos múltiplos de 2, por lo que se puede usar los valores a la mitad para su almacenamiento.

Capítulo 5. Programa para generar la primera fila de cada matriz

Mostramos en Python la programación que incluye algunas propiedades, para esto creamos una función progresiva, es decir, que se alimenta a sí misma con un resultado que llamamos *actual* y genera un resultado que llamamos *proximo*. Estas tablas las almacenamos en un archivo de texto.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
def periodica(actual):
    primo=actual[0]+1
    actualpiu=[0]+actual.copy()+actual.copy()                    # por corregir
    criba=0
    multiplo=actualpiu[criba]
    proximo=[]
    aux=0
    suma=1
    for i in range(primo):
        for j in actual:
            suma=suma + j
            if suma < primo*multiplo:
                proximo.append(j+aux)
                aux=0
            else:
                suma=0
                criba+=1
                multiplo=actualpiu[criba]
                aux=j
    nombre = f"primoskit_{primo}.txt"
    print(nombre)
    with open(nombre, "w") as f:
        f.write(" ".join(map(str, proximo)))
    return proximo

# Llamamos a la función principal para ejecutar el programa
```

```
if __name__ == "__main__":
    nueva=periodica([4, 2])
    for i in range(6):
        nueva=periodica(nueva)
```

Capítulo 6. Aproximación a la solución de la Conjetura de los primos gemelos

En la matriz encontramos siempre al número 2, el cual significa que hay dos valores que difieren en 2, si ambos fueran primos se les llama primos gemelos. Existe la conjetura de que son infinitos, la cual está aún sin demostrar.

Las matrices siempre tienen un 2 al lado derecho, pero podemos encontrar este valor también dentro de la primera fila. Buscaremos encontrar la cantidad de 2 (posibles primos gemelos) en la matriz.

Sabemos que:

La matriz hereda la cantidad de 2 no tachados de la matriz anterior y la aumenta en la cantidad de filas, es decir, se multiplican por la cantidad de filas o el primo analizado.

Cada columna se elimina una vez en la matriz, entonces la cantidad de 2 se reducirá en el doble de la cantidad de 2 de la matriz anterior, esto debido a que el 2 cambia cuando el número anterior o el mismo cambia.

El Teorema de los Números Primos (TNP) estima la cantidad de primos hasta un número ***n***, es aproximadamente $\pi(n) \approx n / \ln(n)$ para valores grandes de ***n***.

Cada matriz tiene un elemento final que representa un valor grande, por lo que sabemos un aproximado de números primos que se deben de tachar.

La eficiencia de las matrices es muy alta, por lo que la cantidad de tachados será cada vez menor respecto a la cantidad de elementos de la matriz, por ello analizaremos la relación de la cantidad de 2 en una matriz y el doble de la cantidad de primos que serán tachados en la tabla de la siguiente página.

Al verificar que la cantidad de 2 es mayor al doble de la cantidad aproximada de primos a partir del primo 137, podemos afirmar que sí son infinitos.

prod. Prim ante	primo	filas	columnas	elemento último	# de 2 en 1f	total 2	Pi() (cant aprox de primos)	total 2/ (2*Pi())
2.00	3	3	1	7	1.00	3	4	0.42
6.00	5	5	2	31	1.00	5	9	0.28
30.00	7	7	8	211	3.00	21	39	0.27
210.00	11	11	48	2,311	15.00	165	298	0.28
2,310.00	13	13	480	30,031	135.00	1,755	2,913	0.30
30,030.00	17	17	5,760	510,511	1,485.00	25,245	38,842	0.32
510,510.00	19	19	92,160	9,699,691	22,275.00	423,225	602,929	0.35
9,699,690.00	23	23	1,658,880	223,092,871	378,675.00	8,709,525	11,605,458	0.38
223,092,870.00	29	29	36,495,360	6,469,693,231	7,952,175.00	230,613,075	286,391,334	0.40
6,469,693,230.00	31	31	1,021,870,080	200,560,490,131	214,708,725.00	6,655,970,475	7,706,638,036	0.43
200,560,490,130.00	37	37	30,656,102,400	7,420,738,134,811	6,226,553,025.00	230,382,461,925	250,401,994,349	0.46
#################	41	41	1,103,619,686,400	304,250,263,527,211	217,929,355,875.00	8,935,103,590,875	9,123,255,087,516	0.49
#################	43	43	44,144,787,456,000	13,082,761,331,670,000	8,499,244,879,125.00	365,467,529,802,375	352,539,369,681,838	0.52
#################	47	47	1,854,081,073,152,000	614,889,782,588,491,000	348,469,040,044,125.00	16,378,044,882,073,900	15,011,877,160,936,900	0.55
#################	53	53	85,287,729,364,992,000	32,589,158,477,190,000,000	15,681,106,801,985,600.00	831,098,660,505,238,000	725,323,560,798,636,000	0.57
#################	59	59	4,434,961,926,979,580,000	1,922,760,350,154,210,000,000	#######################	47,184,450,367,174,700,000	39,233,562,601,929,300,000	0.60
#################	61	61	257,227,791,764,816,000,000	117,288,381,359,407,000,000,000	#######################	2,780,683,625,875,700,000,000	2,208,033,888,895,480,000,000	0.63
#################	67	67	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.66
#################	71	71	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.69
#################	73	73	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.71
#################	79	79	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.74
#################	83	83	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.77
#################	89	89	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.79
#################	97	97	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.82
#################	101	101	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.85
#################	103	103	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.87
#################	107	107	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.90
#################	109	109	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.92
#################	113	113	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.95
#################	127	127	########################	############################	#######################	##########################	##########################	0.97
#################	131	131	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.00
#################	137	137	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.03
#################	139	139	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.05
#################	149	149	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.08
#################	151	151	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.11
#################	157	157	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.13
#################	163	163	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.16
#################	167	167	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.18
#################	173	173	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.21
#################	179	179	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.23
#################	181	181	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.26
#################	191	191	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.28
#################	193	193	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.31
#################	197	197	########################	############################	#######################	##########################	##########################	1.33