Generación de Ternas Pitagóricas *

Antonio Oscar Moreno Zúñiga

29 de diciembre de 2025

Resumen

En el presente artículo se presenta un método definitivo y general para generar cualquier terna pitagórica primitiva, basada en dos valores enteros primos entre sí. En el análisis también se determinan tres números enteros (incéntricos) que surgen de las diferencias en los lados del triángulo pitagórico; a quienes llamaremos "terna aditiva". Se define también el radio del incentro de un triángulo pitagórico que es un número entero y finalmente una demostración de la generalidad del método babilónico

1. Generación de Ternas Pitagóricas

Actualmente el método de generación de Ternas Pitagóricas es el siguiente: $(A, B, C) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, la cual genera ternas primitivas (con valores primos entre sí) y ternas proporcionales a las primitivas. El método actual tampoco afirma que sea el único método de creación de ternas pitagóricas, pero demostraremos que sí lo es.

1.1. Terna aditiva

Mostraremos a continuación tres números que sumados forman los lados del triángulo:

Sea el triángulo pitagórico de catetos A, B y de hipotenusa C, se cumplen las siguientes ecuaciones: $A < C$, $B < C$ y $C < A + B$ por el teorema de existencia del triángulo.

Sean a, b, c en $\mathbb{N}$ tales que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} C &= A + a \\ C &= B + b \\ A + B &= C + c \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Al sumar las tres ecuaciones y operarlas se puede deducir las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &C = a + b + c \\ &A = b + c \\ &B = a + c \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

1.2. La Terna aditiva para el cálculo de la Terna pitagórica

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $C^2 = A^2 + B^2$ por lo tanto

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (b+c)^2 + (a+c)^2 \\ 2ab &= c^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Si c^2 es múltiplo de 2, entonces c es múltiplo de 2. Sea k en $\mathbb{N}$ tal que $c = 2k$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 2ab &= c^2 = (2k)^2 \\ ab &= 2k^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Sin perder generalidad podemos asumir que a es el múltiplo de 2. Sea $a = 2\alpha$ tendremos que

$$\alpha b = k^2 \tag{5}$$

Si ocurre que b también fuera múltiplo de 2, o si ocurre que α y b tuvieran un factor en común $d \neq 1$, entonces por (5) también sería divisor de k, por lo tanto la terna (A, B, C) no sería una terna primitiva según se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} A &= b + c = b + 2k \\ B &= a + c = 2\alpha + 2k \\ C &= a + b + c = 2\alpha + b + 2k \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

1.3. Terna pitagórica primitiva

Para evitar las ternas proporcionales, hacemos que b sea impar. Adicionalmente α y b deberan ser primos entre sí, lo cual junto a la ecuación (5) tenemos que α y b son cuadrados perfectos.
Sea $\alpha = p^2$ y $b = q^2$ con p y el número impar q en $\mathbb{N}$ primos entre sí. Reemplazamos esto en (5).

$$\begin{aligned} ab &= 2k^2 \\ 2p^2q^2 &= 2k^2 \\ pq &= k \end{aligned} \tag{7}$$

Reemplazamos (7) en (6) y tenemos finalmente que:

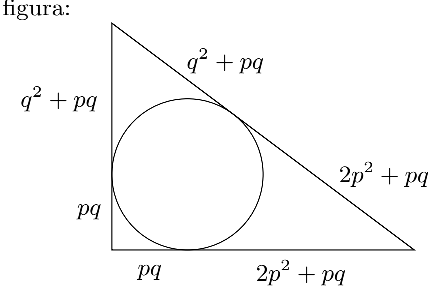
$$\left.\begin{aligned} A &= q^2 + 2pq \\ B &= 2p^2 + 2pq \\ C &= 2p^2 + q^2 + 2pq \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

donde p y q son primos entre sí y q es impar.

Para demostrar que genera una terna pitagórica primitiva, basta con observar los factores de $A = q(2p + q)$ y $B = 2p(p + q)$ que no pueden tener un divisor común.

1.4. Determinación del incentro del triángulo pitagórico

Teniendo la estructura de los lados del triángulo rectángulo, se puede verificar que el incentro tiene un radio igual a pq tal como se muestra en la figura:



1.5. Comparación con el método Babilónico

En el siglo VI a.C. se encontró que los babilónicos tenían registras las ternas pitagóricas en la "tablilla Plimpton 322", en donde se piensa que tenían un método para encontrarlas donde

$$\left.\begin{aligned} A &= m^2 - n^2 \\ B &= 2mn \\ C &= m^2 + n^2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Compararemos el método babilónico con el método de las ternas primitivas, encontrando que el cateto par es B en ambos casos, podemos visualizar las siguiente correspondencia:

$$\left.\begin{gathered} A = m^2 - n^2 = q^2 + 2pq = (p+q)^2 - p^2 \\ B = 2mn = 2p^2 + 2pq = 2(p+q)p \\ C = m^2 + n^2 = 2p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 + p^2 \end{gathered}\right\} \tag{10}$$

Claramente la equivalencia es que $m = p+q$ y $n = q$, lo que demuestra que este método cubre todas las ternas existentes.

1.6. Observaciones finales

- Se ha preferido indicar que q es un número impar a utilizar la estructura de múltiplo de 2 más 1.
- En las ternas pitagóricas primitivas solo un cateto es par, lo cual se visualiza en la fórmula del lado B.
- Hay infinitas ternas en donde la hipotenusa y un lado difieren en 1. Basta hacer q=1 en la fórmula.

- Siempre uno de los lados será $\overset{\circ}{3}$ (múltiplo de 3). Se puede analizar con los factores de cada lado y la corrida de las alternativas de $\overset{\circ}{3}$, $\overset{\circ}{3}+1$ y $\overset{\circ}{3}+2$ para p y q.

Referencias

[1] Wikipedia article ”Terna pitagorica”, the Creative Commons Attribution-Share-Alike License 3.0.
There is a list of all authors in Wikipedia

[2] https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2035/1846
Revista digital Matematica, Educacion e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 9, No2. 2009
Ternas pitagoricas: metodos para generarlas yalgunas curiosidades
Juan Jose Fallas.jfallas@itcr.ac.cr
Escuela de MatematicaInstituto Tecnologico de de Costa Rica

[3] Las ternas pitagoricas : un producto de la actividad humana en el aula de matematica
Gonzalez, Graciela Alicia; Scaglia, Sara
URI: http://repositorio.ungs.edu.ar/handle/UNGS/177
Fecha: 2014-08